13. דריבציות

תזכורת

שטח של משטח $M\subset\mathbb{R}^3$, $\underline{x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

$n=\dfrac{x_1\times x_2}{|x_1\times x_2|}$

אלמנט השטח: $|x_1\times x_2|\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2$

$$\operatorname{area}(M)=\iint|x_1\times x_2|\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2$$

נוסחת Binet-Cauchy

$$|x_1\times x_2|=\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}$$

$$\operatorname{area}=\iint\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2$$

$$x_i=\frac{\partial x}{\partial u^i}$$

$$x=x\left(u^1,u^2\right)$$

13.1 דואליות באינפי

יהי E מרחב אוקלידי ממימד n

$$p\in E$$

$$\mathbb{D}_p=\{f|f\in C^\infty\}$$

דריבציה X היא 1-תבנית

$$X:\mathbb{D}_p\to\mathbb{R}$$

המקיים זהות Leibniz

$$X\left(fg\right)=X\left(f\right)g\left(p\right)+f\left(p\right)X\left(g\right)$$

משפט

מרחב הדריבציות על $\mathbb{D}_p$ הוא מרחב וקטורי במימד n.

הגדרה

T_pE מרחב כל הדריבציות של $\mathbb{D}_p$.
בסיס למרחב T_pE: בקואורדינטות $\left(u^1,u^2\dots u^n\right)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1},\frac{\partial}{\partial u^2},\dots\frac{\partial}{\partial u^n}\right)$$

V מרחב וקטורי על $\mathbb{R}$.
V^* מרחב דואלי של V:

$$V^*=\{\phi|\phi\text{ is 1-form on }V\}$$

$$\phi:V\to\mathbb{R}$$

הגדרה

יהי $\left(x_1,\dots x_n\right)$ בסיס לV.
אזי אומרים ש$\left(y_1,\dots y_n\right)$ של איברים של V^* הוא <u>בסיס דואלי</u> לבסיס $\left(x_i\right)$אם ורק אם מתקיים

$$y_i\left(x_j\right)=\delta_{ij}$$

לכל $i=1,\dots n$, לכל $j=1,\dots n$.

דוגמה

$$V=\mathbb{R}^2$$

בסיס סטנדרטי: $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

(e_1, e_2) בסיס לV.
סימון לבסיס דואלי: $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$בסיס של V^*.
מתקיים:

$$\mathrm{d}x\left(e_1\right) = 1$$

$$\mathrm{d}x\left(e_2\right) = 0$$

$$\mathrm{d}y\left(e_1\right) = 0$$

$$\mathrm{d}y\left(e_2\right) = 1$$

$p \in E$, T_p מרחב משיק.
בסיס $\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots \frac{\partial}{\partial u^n}\right)$

הגדרה

מרחב קו משיק(cotangent) T_p^* הוא <u>מרחב וקטורי דואלי</u> למרחב משיק T_p

הגדרה

בסיס לT_p^* שהוא דואלי לבסיס $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)$ מסמנים $\left(\mathrm{d}u^j\right)$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \mathrm{d}u^j \right\rangle = \delta_i^j$$

$$\mathrm{d}u^j \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \delta_i^j$$

כאשר

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

13.2 בניית תבנית בילינארית מתוך 1־תבנית

$$B\left(v, w\right) : V \times V \to \mathbb{R}$$

נניח שB היא סימטרית: $B\left(v,w\right)=B\left(w,v\right)$.
תבנית ריבועית Q המתאימה:

$$\boxed{Q\left(v\right)=B\left(v,v\right)}$$

דוגמה

$$u\in V=\mathbb{R}$$

$$B\left(v,w\right)=vw$$

תבנית ריבועית Q היא

$$Q\left(v\right)=B\left(v,v\right)=v^{2}$$

נוסחת פולריזציה

$$B\left(v,w\right)=\frac{1}{4}\left(Q\left(v+w\right)-Q\left(v-w\right)\right)$$

דוגמה

אם $\mathrm{d}u^{i}\in V^{*}$ אזי $Q=\left(\mathrm{d}u^{i}\right)^{2}$ (תבנית ריבועית)
אם $v\in V$ אזי $Q\left(v\right)=\left(\mathrm{d}u^{i}\left(v\right)\right)^{2}$

דוגמה

ננח $v=v^{1}e_{1}+v^{2}e_{2}$, $V=\mathbb{R}^{2}$, $\left(e_{1},e_{2}\right)$ בסיס לV.

$$v=v^{i}e_{i}\in V$$

$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y\in V^{*}$ מהווים בסיס דואלי ל$\left(e_{1},e_{2}\right)$ של V

$$Q=E\,\mathrm{d}x^{2}+F\,\mathrm{d}y^{2}$$

כאשר $E,F\in\mathbb{R}$ קבועים.
אם $v\in V$, מחשבים $Q\left(v\right)$ ע"י

$$\boxed{Q\left(v\right)=E\left(\mathrm{d}x\left(v\right)\right)^{2}+F\left(\mathrm{d}y\left(v\right)\right)^{2}}\qquad(*)$$

$$\boxed{Q(v) = E\left(v^1\right)^2 + F\left(v^2\right)^2}$$

נבנה תבנית בילינארית $B(v,v')$ המתאימה:

$$\boxed{B(v,v') = E\,\mathrm{d}x(v)\,\mathrm{d}x(v') + F\,\mathrm{d}y(v)\,\mathrm{d}y(v')} \qquad (**)$$

$$B(v,v') = \frac{1}{4}\left(Q(v+v') - Q(v-v')\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[E\left(\mathrm{d}x(v+v')\right)^2 + F\left(\mathrm{d}y(v+v')\right)^2 - E\left(\mathrm{d}x(v-v')\right)^2 - F\left(\mathrm{d}y(v-v')\right)^2\right]$$

$$B(v,v') = \frac{1}{4}\left(E\left(v^1+v^{1'}\right)^2 + F\left(v^2+v^{2'}\right)^2 - E\left(v^1-v^{1'}\right)^2 - F\left(v^2-v^{2'}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{array}{c} Ev^{1^2} + Ev^{1'^2} + 2Ev^1v^{1'} + F\left(v^2\right)^2 + F\left(v^{2'}\right)^2 + \\ +2Fv^2v^{2'} - E\left(v^1\right)^2 - E\left(v^{1'}\right)^2 + 2Ev^1v^{1'} - \\ -F\left(v^2\right)^2 - F\left(v^{2'}\right)^2 + 2Fv^2v^{2'} \end{array}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(4Ev^1v^{1'} + 4Fv^2v^{2'}\right) = Ev^1v^{1'} + Fv^2v^{2'}$$

דוגמה

$$E = F = 1$$

$$Q = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

ואילו

$$B(v,v') = \mathrm{d}x(v)\,\mathrm{d}x(v') + \mathrm{d}y(v)\,\mathrm{d}y(v') = v^1v^{1'} + v^2v^{2'}$$

13.3 תבנית יסודית ראשונה

$g : T_p \times T_p \to \mathbb{R}$ (סימטרית) כאשר T_p הוא מישור משיק של משטח M בנקודה $p \in M$.
בקואורדינטות $\left(u^1,u^2\right)$, בסיס לT_p $\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}\right)$.

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right)$$

$$g_{ii} = g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial u^i} \right\| = \sqrt{g_{ii}}$$

$$g_{ii} = \left\| \frac{\partial}{\partial u^i} \right\|^2$$

$$\boxed{x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial y}{\partial u^j} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}}$$

13.4 בסיסים דואליים בגיאומטריה דיפרנציאלית

$$\begin{matrix} u^1 = x \\ u^2 = y \end{matrix} \qquad \boxed{g = g_n\left(x,y\right)\,\mathrm{d}x^2 + g_{22}\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y^2}$$

נניח ש־(g_{ij}) <u>אלכסונית</u> $\begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}$.

(מקרה פרטי: $\boxed{g = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ היא מטריקה שטוחה סטנדרטית של המישור $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

דוגמה

נניח $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$. אזי

$$g = \frac{1}{y^2}\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right)$$

היא מטריקה היפרבולית בעקמומיות Gauss $k = --1$:

$$\frac{1}{y^2}\left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right) \qquad \lambda = \frac{1}{y^2} \qquad f = \frac{1}{y}$$

$$K = -\Delta_{LB} \log f = +\Delta_{LB} \log y = \frac{1}{f^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\left(\log y\right) =$$

$$= \frac{1}{f^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{y^2}{y^2} = -1$$

13.5 משפט uniformisation

משפט

כל מטריקה על משטח קשיר היא קשולה קומפקטית למטריקה בעקמומיות Gauss קבועה.

- $K \equiv +1$ - ספירה S^2, $\mathbb{R}P^2$
- $K \equiv 0$ - טורוס, בקבוק של קליין
- $K \equiv -1$ - כל משטח אחר.

דוגמה - טורוס

גישה 1: $L \subset \mathbb{C}$ שריג, טורוס T^2, $T^2 = {}^{\mathbb{C}}\!/_{L}$

$$\tau \in D \qquad L = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\left(\tau, 1\right)$$

גישה 2: משטח סיבוב.

13.6 משטחי סיבוב בקואורדינטות איזותרמיות

$$\left(f\left(\phi\right), g\left(\phi\right)\right)$$

מקבלים משטח עם מטריקה

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} f^2\left(\phi\right) & \\ & \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = f^2$$

$$g_{22} = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\phi}\right)^2$$

בקואורדינטות $\left(\theta, \phi\right)$

$$\underline{x}\left(\theta, \phi\right) = \left(f\left(\phi\right)\cos\phi, f\left(\phi\right)\sin\theta, g\left(\phi\right)\right)$$

$$g = g_{11}\,\mathrm{d}\theta^2 + g_{22}\,\mathrm{d}\phi^2$$

\mathrm{\, d}

$$\boxed{g = f^2(\phi) + \left(\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\phi}\right)^2\right)\mathrm{d}\phi^2}$$

למה

תהי $(f(\phi), g(\phi))$ כאשר $f(\phi) > 0$ פרמטריזציה במהירות יחידה של עקומה C. אזי שינוי משתנים

$$\boxed{\psi = \int \frac{\mathrm{d}\phi}{f(\phi)}} \qquad \boxed{\begin{matrix}\psi = \psi(\phi)\\ \phi = \phi(\psi)\end{matrix}}$$

מגדיר פעולה איזורתמים באמצעות המשתנים (θ, ϕ).

ביחס לקואורדינטות אלה, תבנית יסודית ראשונה של המטריקה מתבאת על ידי מטריצה סקלרית $g_{ij} = f(\phi(\psi))^2\,\delta_{ij}$. במילים אחרות

$$g = f(\phi(\psi))^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}\psi^2\right) \qquad g_{11} = g_{22} = f(\phi(\psi))^2$$

הוכחה

$\phi = \phi(\psi)$. לפי כלל השרשרת,

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\psi} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\psi}$$

כדי לקבל שוויון $g_{11} = g_{22}$ צריכים לפתור משוואה דיפרנציאלית

$$f^2 = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\psi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\psi}\right)^2$$

לפי $(*)$,

$$f^2 = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\psi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\psi}\right)^2$$

$$f^2 = \left(\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\phi}\right)^2\right)\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\psi}\right)^2$$

$$f = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\phi}\right)^2}\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\psi}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\phi} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\phi}\right)^2}}{f}$$

$$\psi = \int \frac{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\phi}\right)^2}}{f\left(\phi\right)}\,\mathrm{d}\phi = \int \frac{\mathrm{d}\phi}{f\left(\phi\right)} = \psi$$

13.7 פרמטר קונפורמי τ של טורוס סיבוב

מסקנה

נתבונן בטורוס סיבוב ב$\mathbb{R}^3$ המתקבל ע"י סיבוב של עקומת Jordan C באורך $L>0$ עם פרמטריזציה במהירות יחידה $\left(f\left(\phi\right), g\left(\phi\right)\right)$ כאשר $\phi \in [0, L]$.

אזי הטורוס הוא שקול קונפורמי לטורוס שטוח

$$\mathbb{R}^2/L_{c,d}$$

כאשר $\mathbb{R}^2$ הוא מישור $\left(\theta, \psi\right)$ כאשר ψ הוא אנטי־נגזרת(אינטגל) של $\dfrac{1}{f\left(\phi\right)}$ כאשר שריג $L_{c,d}$ הוא שריג נפרש ע"י וקטורים $\left(c\frac{\partial}{\partial\theta}, d\frac{\partial}{\partial\psi}\right)$ כך ש

$$L_{c,d} = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\left(ce_1, de_2\right)$$

עם $\left(e_2 = \frac{\partial}{\partial\psi}, e_1 = \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$

$$c = 2\pi$$

$$d = \int_0^L \frac{\mathrm{d}\theta}{f\left(\phi\right)}$$

$\begin{matrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \phi \le L \end{matrix}$ לכן $0 \le \psi \le d$