שיעור 4 - סדרים והומומורפיזם

תרגיל

הראו שהחבורה $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ אינה ציקלית(=נוצרת על ידי חיבורים של איבר ספציפי עם עצמו מספר פעמים

פתרון

$|\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n| = n^2$. כלומר אם קיים איבר $g \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ כך ש$\langle g \rangle = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ אזי $o(g) = n^2$. ניקח איבר כלשהו $g = (a,b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$

$$\overbrace{g + ... + g}^{n\,times} = \overbrace{(a,b) + ... + (a,b)}^{n\,times} = (na, nb) = (0,0) = e$$

$$\Rightarrow o(g) \leq n \Rightarrow o(g) \neq n^2$$

$\Leftarrow\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ לא ציקלית.

תרגיל

בכל חבורה G אם $g \in G$ מקיים $g^n = e$ אזי $o(g) \mid n$

פתרון

נחלק את n ב$o(g)$ עם שארית $n = ao(g) + r$ כך ש$0 \leq r < o(g)$

$$e = g^n = g^{ao(g)+r} = g^{ao(g)}g^r = \left(g^{o(g)}\right)^a g^r = e^a g^r = eg^r = g^r$$

אבל $o(g) = x$ הוא המינימלי שעבורו $g^x = e$ ולכן $r = 0 \Leftarrow o(g) \mid n$

המשפט היסודי של חבורות ציקליות

1. כל תת חבורה של חבורה ציקלית היא גם כן ציקלית.
2. (נכון גם לחבורות לא ציקליות) הסדר של תת חבורה מחלק את הסדר של החבורה.
3. אם G חבורה ציקלית מסדר n אזי לכל מחלק של n k קיימת תת חבורה של G מסדר k.

מסקנה

התת חבורות היחידות של $\mathbb{Z}_n$ הן $k\mathbb{Z}_n$ כאשר $k \mid n$

[שאלה - מה הסדר של $k\mathbb{Z}_n$? תשובה: $\frac{n}{k}$]

התת חבורות היחידות של $\mathbb{Z}_n$ הן $\frac{n}{k}\mathbb{Z}_n$ כאשר $k \mid n$

דוגמה

$n=6$, המחלקים של 6 הם 1,2,3,6, ולכן תת החבורות של $\mathbb{Z}_6$ הן:

$$6\mathbb{Z}_6=\{0\},3\mathbb{Z}_6=\{0,3\},2\mathbb{Z}_6=\{0,2,4\},1\mathbb{Z}_6=\mathbb{Z}_6$$

תרגיל בית

הראו שבחרובה ציקלית $G=\langle g\rangle$, מתקיים $o\left(g^k\right)=\dfrac{|G|}{\gcd\left(k,|G|\right)}$

תרגיל

הוכח או הפרך: אם $a,b\in G$ איברים מסדר סופי אזי ab גם כן מסדר סופי.

פתרון

- אם G אבלית נוכיח:
  נסמן $o\left(a\right)=n,o\left(b\right)=m$

$$\left(ab\right)^{nm}=abab...ab=a^{nm}b^{nm}=\left(a^n\right)^m\left(b^m\right)^n=e^me^n=e$$

הסדר סופי $\Leftarrow o\left(ab\right)\leq nm<\infty$

- אם G לא אבלית אז נפריך:

$$a=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

ראינו קודם כי $o\left(b\right)=3$.

$$a^4=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=e$$

$$o\left(a\right)=4$$

אבל

$$ab=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\left(ab\right)^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$$

כלומר לכל $1\leq n$ מתקיים $o\left(ab\right)=\infty \Leftarrow \left(ab\right)^n\neq e$

תרגיל

תהי G חבורה מסדר סופי זוגי. הוכח כי קיים איבר מסדר 2 בGוכלומר הוכח כי קיים $g \in G$ כך שמתקיים $g^2 = e$[

פתרון

נניח בשלילה כי לא קיים איבר מסדר 2. נחלק את G לתת קבוצות זרות באופן הבא:

$$G = \{e\} \cup \left\{a_1, a_1^{-1}\right\} \cup \left\{a_2, a_2^{-1}\right\} \cup ...$$

אם $\left\{a_n, a_n^{-1}\right\} \cap \left\{a_k, a_k^{-1}\right\} \neq \emptyset$ אזי $\left\{a_k, a_k^{-1}\right\} = \left\{a_n, a_n^{-1}\right\}$ לכן אפשר להניח כי הקבוצות זרות.

כעת, בגלל שהקבוצות זרות מתקיים $|G| = 1 + 2 + ... + 2 = 2m + 1$ $\Leftarrow$ $|G|$ אי זוגי.

תרגיל בית

G חבורה. $g, h \in G$ איברים מתחלפים. נסמן $o(g) = n, o(h) = k$.
$\gcd(k, n) = 1$. הראו ש$o(gh) = o(g)\, o(h)$

הגדרה

G חבורה, $A \subseteq G$ תת קבוצה. התת-חבורה של G הנוצרת ע"י A היא התת חבורה המינימלית המכילה את A ומסמנים אותה $\langle A \rangle$

משפט

1. $$\langle A \rangle = \bigcap_{\substack{M \leq G \\ A \subseteq M}} M$$

2. $$\langle A \rangle = \left\{ x_1^{m_1} \cdot ... \cdot x_k^{m_k} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1, ... x_k \in A \\ m_1, ... m_k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

דוגמה

$$\mathbb{Z}_{12}$$

$$\langle 4, 6 \rangle = \langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}_{12}$$

הגדרה

נתונות שתי חבורות $(G, *, e)$, (H, Δ, I). פונקציה $\varphi : G \to H$ נקראת הומומורפיזם אם $\varphi(a * b) = \varphi(a) \Delta \varphi(b)$ לכל $a, b \in G$

תכונות

1. $\varphi(e)=I$
2. $\varphi\left(x^{-1}\right)=(\varphi(x))^{-1}$
3. $\varphi(x^n)=(\varphi(x))^n$

הגדרות

- אפימורפיזם = הומומורפיזם על.
- מונומורפיזם = הומומורפיזם חח"ע.
- איזומורפיזם = אפימורפיזם+מונומורפיזם.

תרגיל

$f:G\to H$ אפימורפיזם. הראו שאם G אבלית אזי H אבלית.

פתרון

יהיו $a,b\in H$. f על, לכן קיימים $\bar{a},\bar{b}\in G$ כך ש$f(\bar{a})=a$, $f(\bar{b})=b$. מתקיים:

$$ab=f(\bar{a})f\left(\bar{b}\right)=f\left(\bar{a}\bar{b}\right)=f\left(\bar{b}\bar{a}\right)=f\left(\bar{b}\right)f(\bar{a})=ba$$

לכן H אבלית.

תרגיל בית

הראו כי אם $f:G\to H$ איזומורפיזם אזי:
G ציקלית $\Leftrightarrow$ H ציקלית

תרגיל

$f:G\to H$ הומומורפיזם. הראו ש$o_H(f(x))\mid o_G(x)$

פתרון

$$(f(x))^{o_G(x)}=f(x)...f(x)=f\left(x^{o_G(x)}\right)=f(e)=e\Rightarrow o(f(x))\mid o(x)$$