אינטגרציה של תבנית דיפרנציאלית

חישוב אינטגרל על תחום k ממדי ב$\mathbb{R}^k$ מוגדר ע"י שבירת התחום למקבילונים המוגדרים ע"י k וקטורים, חלוקת משקל לכל מקבילון וסכימת התוצאות.

הגבול של סכומים אלו הוא האינטגרל(כאשר גודלם←0)

"חלוקת המשקל" למקבילון הנתון ע"י k וקטורים מוגדרת באמצעות תבנית דיפרנציאלית.

תזכורת

k-תבנית ω פועלת באופן לינארי על k וקטורים, כלומר

$$\omega_p\left(v_1, v_2, \ldots v_k\right) = \text{number}$$

דוגמה

ה2-תבנית $\omega = xy\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - x^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$ מגדירה חוקיות שונה של חלוקת משקל לזוג וקטורים בהתאם לנקודה p.

למשל - אם $p = (1,2,3)$,

$$\omega_p = 2\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$$

כיצד ω_p מחלקת לזוג הוקטורים $\begin{matrix} v_1 = (4,0,-1) \\ v_2 = (2,1,3) \end{matrix}$?

$$\omega_p\left(v_1, v_2\right) = 2\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \ldots$$

לפי המשתנים בכל תת תבנית נבחר את העמודות, ונעשה דטרמיננטה. למשל עבור $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, y, z הם המשתנים השני והשלישי, ולכן נבחר את העמודות השניה והשלישית:

$$\cdots = 2\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 14 = \boxed{-12} \in \mathbb{R}$$

הגדרה

אם $\omega_p = g\left(t_1, \ldots t_k\right)\,\mathrm{d}t \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t$ היא k-תבנית דיפרנציאלית ב$\mathbb{R}^k$ וD תחום ב$\mathbb{R}^k$,

$$\int_D \omega \equiv \int_D g\,\mathrm{d}t_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_k := \begin{cases} \int_D g\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_k & D \text{ in oritentation } \equiv \left(t_1, \ldots t_k\right) \\ -\int_D g\,\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k & \text{otherwise} \end{cases}$$

הערה: יש כאן k אינטגרלים - $\underbrace{\int \ldots \int}_{k \text{ times}}$ - אבל רושמים רק $\int$ אחד.

דוגמה

חשב את $\int_D \omega$ כאשר $\omega = x^2 y \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ וD הוא המלבן $\left\{\substack{0\le x\le 2\\ 0\le y\le 1}\right\}$ הנתון באוריינטציה סטנדרטית.

פתרון

האוריינטציה של D תואמת את הסדר $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$

$$\int_D \omega = \int_D x^2 y \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^2 x^2 y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \cdots = \boxed{\frac{4}{3}}$$

אינטגרל על יריעה

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k-ממדית, וקיימת מפה $\varphi : \underbrace{U}_{\ni(t_1,t_2,\dots t_k)} \to M$. נתונה תבנית דיפרנציאלית ω ונרצה לחשב $\int_M \omega$.

האינטגרל הזה מסתמך על אינטגרציה על U. נעשה זאת בעזרת הpullback: $\varphi^* \omega$

$$\int_M \omega := \int_U \varphi^* \omega = \int_U \omega_{\varphi(t_1,\dots t_k)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \dots \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}\right) \mathrm{d}t_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_k =$$

$$= \pm \int_U \omega_{\varphi(t_1,\dots t_k)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \dots \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}\right) \mathrm{d}t_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}t_k$$

הסימן נקבע ע"פ ההתאמה בין φ ובין האוריינטציה של M.

דוגמה

משטח S נתון ע"י פרמטריזציה

$$\varphi(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{1-r^2}\right) \qquad \begin{matrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{matrix}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 = 1 - z^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

S הוא חצי ספירה צפונית. חשב את האינטגרל $\int_S \omega$ כאשר $\omega = z^2 \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ ובS האוריינטציה המושרית מφ.

פתרון

$$\int_S \omega = \int_U \varphi^* \omega$$

עבור $U = \left\{ (r,\theta) \middle| \begin{array}{c} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array} \right\} = [0,1] \times [0,2\pi]$.

כדי לחשב את $\varphi^*\omega$ נמצא

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \equiv \varphi_r = \left(\cos\theta, \sin\theta, \frac{-r}{\sqrt{1-4^2}} \right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \equiv \varphi_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

$$\Rightarrow \varphi^*\omega = \sqrt{1-r^2}^2 \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \, (\varphi_r, \varphi_\theta) \, \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta =$$

$$= \left(1-r^2\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta =$$

$$= \left(1-r^2\right) \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta =$$

$$= \left(r - r^3\right) \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$$

$$\int_S \omega = \int_U \varphi^*\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r-r^3\right) \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta = \cdots = \boxed{\pi/2}$$

דוגמה

נתונה העקומה C המוגדרת כחלק הגרף $x = y^2$ בתחום $0 \le x \le 1, y \ge 0$ עם אוריינטציה המוגדרת ע"י תנועה אל ראשית הצירים.

חשב את $\int_C \omega$ עבור $\omega = xy \, \mathrm{d}x - y^2 \, \mathrm{d}y$.

פתרון

פרמטריזציה של העקומה C:

$$\gamma(t) = \left(t^2, t\right) \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\int_C \omega = \pm \int_0^1 \gamma^*\omega = \pm \int_0^1 \left(t^2 \cdot t \underbrace{\mathrm{d}x\,(2t,1)}_{=2t} - t^4 \underbrace{\mathrm{d}y\,(2t,1)}_{=1} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= -\int_0^1 \left(2t^4 - t^4\right) \mathrm{d}t = -\int_0^1 t^4 \, \mathrm{d}t = -\frac{t^5}{5}\Big|_{t=0}^{t=1} = \boxed{-\frac{1}{5}}$$