הסתברות

הגדרה

(Ω, S) מרחב מדיד ו$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות מדידות(בS). נגדיר:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{k=1}^{n}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right)$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{k=1}^{n}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right)$$

במילים: ה$\limsup$ הוא קבוצת כל התוצאות שנמצאות ב∞ A_nים, וה$\liminf$ הוא קבוצת התוצאות הנמצאות בכל הA_nים פרט למספר סופי.

דוגמה

$\Omega = \mathbb{R}$, $S = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. נגדיר סדרת מאורעות

$$A_n = \begin{cases} \left[0, \frac{1}{n}\right] & n \text{ is odd} \\ \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right] & n \text{ is even} \end{cases}$$

קל לראות כי $\overline{\lim} A_n = \{0, 1\}$ ו$\underline{\lim} A_n = \emptyset$(מופיע בלי דילוגים)

הערה

תמיד $\underline{\lim} A_n \subseteq \overline{\lim} A_n$.

למה(בורל קנטלי)

יהי (Ω, S, P) מרחב הסתברות ו$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות בS. אזי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies P\left(\overline{\lim} A_n\right) = 0$$

במילים: אם המאורעות A_n כ"כ נדירים עד שסכום ההסתברויות שלהם מתכנס, אזי הסיכוי להמצא ב∞ A_nים הוא 0.

הוכחה

לכל n נגדיר $0 \geq \sum\limits_{i=1}^{n} I_{A_i} =: Z_n$ - זוהי פונקציה פשוטה. אזי $Z = \lim_{n\to\infty} Z_n = \sum_{i=1}^{\infty} I_{A_i}$. ע"פ משפט ההתכנסות המונוטונית:

$$(\mathbb{E}[Z] =) \int_\Omega Z \,\mathrm{d}P = \int_\Omega \left(\lim_{n\to\infty} Z_n\right) \mathrm{d}P = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega Z_n \,\mathrm{d}P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$$

$\int_\Omega Z \,\mathrm{d}p < \infty$, ולכן ע"פ ההרצאה $Z < \infty$ כמעט בכל מקום.

$P(\{z=\infty\}) = 0$. נשים לב כי $\{z=\infty\} = \overline{\lim} A_n$.

הסבר: אם $\omega \in \overline{\lim} A_n$ אזי ω נמצא ב∞ A_nים, ואז ∞ אינדיקטורים I_{A_i} יתנו 1 והטור $Z = \sum\limits_{i=1}^{\infty} I_{A_i}$ ייתבדר.

ולהפך: אם $Z = \infty$ אזי ∞ אינדיקטורים I_{A_i} הם 1, וω נמצא ב∞ A_iים.

כלומר: $P\left(\overline{\lim} A_n\right) = 0$.

טענה

יהיו $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של משתנים מקריים במרחב הסתברות (Ω, S, P).

אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) < \infty$ לכל $\varepsilon > 0$ אזי $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0\right) = 1$. כלומר יש התכנסות כב"מ("almost surely" - מתכנס כמעט בוודאות).

הוכחה

נקבע $\varepsilon > 0$, ונגדיר $A_n = \{\omega | |X_n(\omega)| \varepsilon > 0\} = \{|X_n| > \varepsilon\}$.

למת בורל קנטלי אומרת כי $P\left(\overline{\lim} A_n\right) = 0$. נשים לב ש

$$\left(\overline{\lim} A_n\right)^{\complement} = \{\omega | \exists_{N_\omega \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_\omega} \omega \notin A_n\} = \{\omega | \exists_{N_\omega} \forall_{n \geq N_\omega} |X_n(\omega)| \leq \varepsilon\} =: B_\varepsilon$$

(נשים לב שלכל $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon^{\complement} = \overline{\lim} A_n$ ולכן $P\left(B_\varepsilon^{\complement}\right) = 0$)

נגדיר $B := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}$. זוהי בדיוק הקבוצה שבה יש התכנסות לאפס.

כעת:

$$P\left(B^{\complement}\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}^{\complement}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(B_{\frac{1}{n}}^{\complement}\right) = 0$$

$\Longleftarrow$ $P(B) = 1$ וסיימנו.

משפט(אי שוויון מרקוב)

תהי $f : \Omega \to [0,\infty]$ פונקציה מדידה ואי שלילית על הממ"ח (Ω, S, μ).

אזי לכל $0 < t < \infty$ $\mu(\{f \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$.

(אם $X : \Omega \to [0,\infty]$ משתנה מקרי, אזי לכל $0 < t < \infty$ $P(X \geq t) \leq \frac{1}{t} \int_\Omega X \,\mathrm{d}P = \frac{1}{t}\mathbb{E}[X]$)

הוכחה

בגלל שf אי שלילית,

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu \geq \int_{\{f\geq t\}} f\,\mathrm{d}\mu \geq \int_{\{f\geq t\}} t\,\mathrm{d}\mu = t\cdot\int_{\{f\geq t\}} \mathrm{d}\mu = t\cdot\mu\{f\geq t\}$$

הגדרה

יהיו (Ω,S,P) מרחב הסתברות.
המאורעות $A,B\in S$ יקראו <u>בלתי תלויים</u> אם

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \iff P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A|B) \iff \begin{array}{l} P(B)=P(B|A)\\ P(A|B)=P(A)\end{array}$$

דוגמה(למרחב הסתברות)

מטבע הוגן (Ω,S,P) כאשר $\Omega=\{H,T\}$=קבוצת התוצאות=מרחב מדגם.

$$S=\{\emptyset,\{H\},\{T\},\{H,T\}\}=\mathcal{P}(\Omega)$$

$P:S\to[0,1]$ מוגדרת ע"י

$$\left.\begin{array}{rcl} P(\emptyset) & = & 0\\ P(\{H\})=P(\{T\}) & = & \frac{1}{2}\\ P(\{H,T\}) & = & 1\end{array}\right\} \implies P(A)=\frac{|A|}{2}$$

קל לראות כי P היא מידה על S ומקיימת $P(\Omega)=1$, ולכן <u>הסתברות</u>. למשל:

$$1=P(\{H\}\uplus\{T\})=P(\{H\})+P(\{T\})$$

נגדיר מ"מ $X:\Omega\to\mathbb{R}$ ע"י $\begin{array}{l}H\mapsto 1\\ T\mapsto 0\end{array}$. בעצם $X(\omega)=1\cdot I_{\{H\}}(\omega)+0\cdot I_{\{T\}}(\omega)$ פונקציה פשוטה!

נחשב תוחלת:

$$\mathbb{E}[X]=\int_\Omega X\,\mathrm{d}P=1\cdot P(\{H\})+0=\frac{1}{2}$$

שונות

$$\mathrm{Var}[X]=\int_\Omega (X-\mathbb{E}[X])^2\,\mathrm{d}P=\int_\Omega\left(X-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}P=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\cdot I_{\{H\}}-\frac{1}{2}I_{\{T\}}\right)^2\mathrm{d}P=$$

$$=\int_\Omega\left(\frac{1}{4}I_{\{H\}}^{\cancel{2}}-\cancel{\frac{1}{2}I_{\{H\}}\cdot I_{\{T\}}}+\frac{1}{4}\cdot I_{\{T\}}^{\cancel{2}}\right)\mathrm{d}P=\frac{1}{4}\cdot P(\{H\})+\frac{1}{4}\cdot P(\{T\})=\frac{1}{4}$$

($I_{\{H\}}^2=I_{\{H\}}$ כי $I_{\{\}}\in\{0,1\}$, ו$I_{\{H\}}\cdot I_{\{T\}}=0$ כי הם מאורעות זרים)

התפלגות מצטברת

$$F_X\left(x\right) := P\left(X \leq x\right) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$