גרפים מרחיבים – תרגיל בית מס' 1

להגשה: 26.11.15

שאלות שמסומנות מ (*) הינן קשות יותר ואינן חובה.

1. יהי G (n,d)- גרף. הוכיחו כי:

   א. הקוטר של G מקיים $diam(G) \geq log_{d-1}n - 1$.

   ב. מספר הצביעה של G מקיים $\chi(G) \leq d+1$.

   ג. הגרף G קשיר אם ורק אם מתקיים $\lambda_2 < \lambda_1$.

   ד. אם הגרף G קשיר, אז הוא דו-צדדי אם ורק אם מתקיים $\lambda_n = -\lambda_1$.

2. יהי G (n,d)- גרף פשוט (כלומר, ללא לולאות וקשתות כפולות), ויהי G^c הגרף המשלים. נסמן את הערכים העצמיים של G ב- $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ ואת הערכים העצמיים של G^c ב- $\lambda_1' \geq \cdots \geq \lambda_n'$. הוכיחו כי לכל $i \geq 2$ מתקיים $\lambda_i' = -1 - \lambda_{n+2-i}$.

3. נאמר שגרף הוא a- מרחיב אם לכל שתי קבוצות קדקדים S,T עם $|S|,|T| \geq \frac{n}{a}$ קיימת לפחות קשת אחת בין S ל- T. הוכיחו שכל (n,d,α)- גרף הוא $(1/\alpha)$- מרחיב.

4. נאמר שגרף הוא (c,k)- מרחיב אם לכל קבוצה S בגודל k לכל היותר מתקיים $|\Gamma(S)| \geq c|S|$. נאמר שקדקד ב$\Gamma(S)$ הוא "שכן יחיד" של S אם יש לו שכן אחד ויחיד ב S.

   א. יהי G גרף (c,k)- מרחיב. הוכיחו כי לכל תת קבוצה S של $V(G)$ בגודל k לכל היותר יש לפחות $\Omega(|S|\left(c - \frac{d}{2}\right))$ שכנים יחידים.

   ב. הוכיחו כי לכל $d \geq 30$, קיים (n,d)- גרף שהוא $(\frac{3d}{4}, \frac{n}{50d})$- מרחיב.

   ג. הוכיחו כי לכל $0 < \rho < 1$, כל (n,d,α)- גרף הוא $(\frac{1}{\rho+\alpha^2}, \rho n)$- מרחיב.

5. יהי G (n,d)- גרף קשיר. נגדיר הילוך מקרי על הגרף בצורה קצת שונה מאשר בהרצאה: בכל צעד, בסיכוי 1/2 נשארים במקום ובסיכוי 1/2 עוברים לשכן (באופן אוניפורמי על פני השכנים). נסמן ב $Mix(G)$ (זמן הערבוב) את הזמן t המינימלי כך

שלכל התפלגות התחלתית P_0 מתקיים $||P_t - u||_1 \leq 1/2$, כאשר P_t היא ההתפלגות אחרי t צעדים של ההילוך.

א. הוכיחו כי $Mix(G) < \infty$, כלומר ההילוך אכן מתערבב לכל התפלגות התחלתית.
ב. הוכיחו כי זמן הערבוב המקסימלי מתקבל כאשר P_0 מרוכזת על קודקוד בודד (כלומר, מתחילים את ההילוך מקודקוד מסוים).
ג. הוכיחו כי אם $Mix(G) = T$ אז לכל k טבעי, מתקיים $||P_{kT} - u||_1 \leq 2^{-k}$.
ד. יהי G (n, d, α)- גרף. נתבונן בהילוך מקרי על G. הוכיחו כי מתקיים $\Omega\big(diam(G)\big) \leq Mix(G) \leq O(\log \mathrm{n} \,/\, \log(\frac{1}{\alpha}))$.

6. א. (*) הוכיחו בעזרת שיטה הסתברותית כי לכל k, m טבעיים, קיים גרף שאינו מכיל מעגל באורך $\leq k$, ובכל זאת מספר הצביעה שלו הוא לפחות m.

ב. (*) הציגו בניה מפורשת של גרף ללא משולשים (כלומר, ללא מעגל באורך 3) ועם מספר צביעה גדול כרצוננו.

בהצלחה!