תרגיל מספר 2 מבנים אלגבריים

12 במרץ 2019

1. תזכורת להגדרה: תהא $\sigma \in S_n$ נגדיר

$$t = \#\left\{(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} : \ i < j, \sigma(j) < \sigma(i)\right\}$$

להיות מספר היפוכי הסדר [אינדקסים (i,j) המקיימים כי $i < j$ וגם $\sigma(j) < \sigma(i)$ נקראים היפוך סדר. שימו לב כי בשאלה זו (i,j)זהו זוג סדור של האינדקסים i,j ולא תמורה]. עוד נגדיר את הסימן של σ להיות

$$sgn(\sigma) = (-1)^t$$

כלומר הסימן של σ הוא -1 בחזקת מספר היפוכי הסדר. לכן, אם מספר היפוכי הסדר הוא זוגי הסימן שווה 1 ואם מספר היפוכי הסדר הוא אי זוגי אזי הסימן שווה ל -1. התמורות שהסימן שלהם שווה 1 נקראות תמורות זוגיות ואילו תמורות שהסימן שלהם שווה -1 נקראות תמורות אי זוגיות.

(א) תנו דוגמא ל 2 תמורות זוגיות ו 2 תמורות אי זוגיות ב S_5.

(ב) יהא $1 < n$. נסמן את קבוצת התמורות הזוגיות ב S_n ב A, נסמן את קבוצת התמורות האי זוגיות ב B. הוכיחו כי $|A| = |B|$ ומצאו כמה תמורות זוגיות יש. [הדרכה: הגדירו $F : A \to B$ ע"י הכפלה בתמורה מסויימת (רמז: תמורה שתהפוך את הסימן), והראו שF מוגדרת היטב והפיכה].

2. קבעו עבור כל אחת מהקבוצות והפעולות הבאות האם היא אגודה/מונאיד/חבורה. במידה שקיימת יחידה (רגילה/שמאלית/ימנית) מצאו אותה. במידה שמדובר בחבורה מצאו את ההופכי של כל איבר.

(א) קבוצת שורשי היחידה מסדר n, כלומר הקבוצה $X = \{a \in \mathbb{C} \,|\, a^n = 1\}$ עם פעולת הכפל הרגיל של מספרים מרוכבים.

(ב) קבוצת המטריצות הריבועיות מסדר $n > 1$, כלומר $\mathbb{F}^{n\times n}$ עם פעולת כפל מטריצות

(ג) המטריצות $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,|\, 0 < a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R} \right\}$ עם פעולת כפל מטריצות רגיל.

(ד) הטבעיים $G=\mathbb{N}$ עם הפעולה $a*b=a^b$

(ה) תת קבוצה של הפולינומים $X=\{p(x)\in\mathbb{R}[x]\,|p(1)=0\}$ עם חיבור פולינום רגיל.

(ו) הטבעיים $G=\mathbb{N}$ עם פעולת מקסימום $a*b=\max\{a,b\}$

(ז) קטעים פתוחים בקבוצת הממשיים

$$G=\left\{\,(a,b)\subseteq\mathbb{R}\,|\,a<b,\,a,b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\,\right\}\cup\{\emptyset\}$$

עם פעולת חיתוך קבוצות.

(ח) תת קבוצה של המטריצות $G=\{\begin{pmatrix}0&a\\0&b\end{pmatrix}\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$ עם כפל מטריצות רגיל.

(ט) המטריצות המשולשיות $G=\left\{\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}\,|\,a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ עם כפל מטריצות רגיל.

(י) תהי $A\neq\varnothing$ קבוצה, וניקח את $(P(A),\Delta)$ כלומר, קבוצת החזקה עם פעולת ההפרש הסימטרי.

3. האם קיימת אגודה $(A,\star)$, $|A|\geq 2$, עבורה כל איברי A הם יחידה ימנית?