תרגיל מספר 3 מבנים אלגבריים

30 בדצמבר 2014

1. תהא G חבורה. הוכח כי

(א) $\forall g_1, g_2 \in G: (g_1g_2)^{-1} = g_2^{-1}g_1^{-1}$

פתרון : יהיו $g_1g_2 \in G$. צ"ל כי $(g_1g_2)\, g_2^{-1}g_1^{-1} = e$. ואכן מקיבוציות נוכל לקבל כי

$$(g_1g_2)\, g_2^{-1}g_1^{-1} = g_1 \left(g_2g_2^{-1}\right) g_1^{-1} = g_1eg_1^{-1} = g_1g_1^{-1} = e$$

(ב) אם G חילופית אזי $\forall g_1, g_2 \in G: (g_1g_2)^{-1} = g_1^{-1}g_2^{-1}$

פתרון : יהיו $g_1g_2 \in G$. "ל כי $(g_1g_2)\, g_1^{-1}g_2^{-1} = e$. ואכן מקיבוציות וחילופיות נוכל לקבל כי

$$(g_1g_2)\, g_1^{-1}g_2^{-1} = (g_2g_1)\, g_1^{-1}g_2^{-1} = g_2 \left(g_1g_1^{-1}\right) g_2^{-1} = g_2eg_2^{-1} = g_1g_1^{-1} = e$$

2. תהא G חבורה בה מתקיים $\forall g_1, g_2 \in G : (g_1g_2)^2 = g_1^2g_2^2$.
הוכח כי G חבורה חילופית.
פתרון : יהיו $g_1g_2 \in G$. לפי נתון מתקיים

$$g_1\,(g_2g_1)\, g_2 = (g_1g_2)\,(g_1g_2) = (g_1g_2)^2 = g_1^2g_2^2 = g_1\,(g_1g_2)\, g_2$$

נכפיל את השיוויון ב g_1^{-1} משמאל וב g_2^{-1} מימין ונקבל כי $g_2g_1 = g_1g_2$.

3. עבור $\sigma \in S_n$ ומחזור $(i_1, i_2, \ldots i_m) \in S_n$ הוכח כי מתקיים השיוויון הבא

$$\sigma\,(i_1, i_2, \ldots i_m)\,\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_m))$$

פתרון : ע"י הכפלה מימין ב σ ומשמאל ב σ^{-1} שקול להוכיח כי

$$(i_1, i_2, \ldots i_m) = \sigma^{-1}\,(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_m))\,\sigma$$

יהא $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ צריך להוכיח כי שתי הפונקציות (משני צידי השיוויון) מעתיקות אותו לאותו מספר.

אם $x\in\{i_1,\dots i_m\}$ אזי $x=i_k$ כלשהוא ואז

$$\sigma^{-1}\left(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_m)\right)\sigma(i_k)=\sigma^{-1}\left(\sigma(i_{k+1})\right)=i_{k+1}$$

(אם $k=m$ אז נחליף את $m+1$ ב־1)

ומצד שני

$$\left(i_1,i_2,\dots i_m\right)(i_k)=i_{k+1}$$

ויש שיוון.

אם $x\notin\{i_1\dots i_m\}$ אזי

$$\sigma^{-1}\left(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_m)\right)\sigma(x)=\sigma^{-1}\sigma(x)=x$$

התמורה $\left(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_m)\right)$ שולחת את $\sigma(x)$ לעצמו כי אחרת $\sigma(x)=\sigma(i_k)$ וכיוון שזוהי תמורה (בפרט חח"ע) זה גורר כי $x=i_k$ סתירה.

ומצד שני

$$\left(i_1,i_2,\dots i_m\right)(x)=x$$

4. תרגיל מודרך: טענה־ קיימות $\sigma_1,\sigma_2\in S_n$ כך שכל $\sigma\in S_n$ ניתן להציג כמכפלה שלהם והופכיהם.

כלומר $\sigma=\prod\limits_{i=1}^{N}\tau_i$ כאשר לכל i מתקיים $\tau_i\in\left\{\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2,\sigma_2^{-1}\right\}$.

אנחנו נעבוד עם $\sigma_1=(1,2,3,\dots,n)\,,\sigma_2=(1,2)$.

(א) הראה כי כל חילוף מהצורה $(1,i)$ ניתן להציגו ע"י ע"י σ_1,σ_2 והופכיהן. (רמז: תרגיל 3 יכול להיות לעזר

פתרון : יהיה $(1,i)$ חילוף. מתקיים

$\tau=\sigma_2\sigma_1=(2,3\dots,n)$ ואז $\tau^{i-2}(2)=i$ בנוסף $\tau^{i-2}(1)=1$.

נסמן $\tau'=\tau^{i-2}$ ואזי לפי תרגיל 3 מתקיים $\tau'\sigma_2\left(\tau'\right)^{-1}=\left(\tau'(1),\tau'(2)\right)=(1,i)$.

(ב) הראה שכל חילוף (i,j) ניתן להביעו בעזרת $\{(1,k)\}_{k>2}$

פתרון : מתקיים כי $(1.i)\,(1,j)\,(1.i)=(i,j)$

(ג) הוכח את הטענה.

פתרון : כל $\sigma\in S_n$ ניתן להציגה כמכפלה של חילופים. לפי סעיפים קודמים:

כל חילוף נביע בעזרת מכפלה של שתי חילופים $(1,k)\,(i,k')$.

כל מכפלה כזאת נביע באמצעות $\tau'\sigma_2\left(\tau'\right)^{-1}$ שזה אכן מכפלה שמעורבים בה רק תמורות מתוך $\left\{\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2,\sigma_2^{-1}\right\}$.

5. נזכיר כי A_n היא תת קבוצה של S_n של התמורות הזוגיות ומהווה חבורה ביחס להרכבה.

מצא את המרכז שלה $C(A_n)$

פתרון : במקרה של $n\geq 4$: נניח שקיימת $id\neq\sigma\in C(A_n)$. נשתמש בהצגה של מחזורים זרים $\sigma=(i_1,i_2,\dots)\,(\cdots)\cdots(\cdots)$

נתסכל ב $\tau=(i_1i_2)(i_2j)$ כאשר $j\neq i_1,i_2$ (יש לפחות 2 אפשריות כאלה).

מהגדרת המרכז צריך להתקיים $\sigma\tau=\tau\sigma$. מתקיים $\tau\sigma(i_1)=\tau(i_2)=j$ ו־ $\sigma\tau(i_1)=\sigma(i_2)$ ולכן $\sigma(i_2)=j$ אבל ל־2 יש שתי אפשריות שונות.. סתירה.

מסקנה $C(A_n)=\{id\}$

עבור $n=3$ נקבל כי $A_3=\{id,(1,2)(2,3)=(1,2,3),(2,3)(1,2)=(132)\}$ והיא חבולה חילופית ולכן $C(A_3)=A_3$

עבור $n=2$ נקבל כי $A_2=\{id\}$ ולכן שווה למרכז שלה.

6. שאלת בונוס (לא חובה) נגדיר

$$G=\left\{(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}\,|\,\forall i\,\#\{a_{i,j}\neq 0\}_{j\in\mathbb{N}}<\infty\wedge\forall j\,\#\{a_{i,j}\neq 0\}_{i\in\mathbb{N}}<\infty\right\}$$

כלומר אוסף המטריצות מגודל אינסופי $\begin{pmatrix} * & * & \cdots \\ & * & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$ המקיימות שבכל שורה (ובכל טור) יש מספר סופי של איברים ששונים מאפס.

(א) הוכח כי G עם כפל מטריצות היא מונואיד (לא לשכוח להוכיח סגירות).

פתרון : יהיו $A,B\in G$. נראה שבעמודה $C_1(AB)$ יש מספר סופי של איברים שונים מאפס (לשאר העמודות והשורות הרעיון דומה).

$C_1(AB)=A\cdot C_1(B)$ נסמן את האיברים השונים מאפס בעמודה הראשונה של B ב $b_{i_1,1},b_{i_2,1}\dots,b_{i_n,1}$ אזי נמשיך

$A\cdot C_1(B)=\sum_{k=1}^{n}b_{i_k,1}\cdot C_{i_k}(A)$. כיוון שבכל עמודה $C_{i_k}(A)$ יש גם מספר סופי של איברים שונים מאפס (נניח שהמקס' בין כל העמודות הוא M) אזי מספר האיברים שונים מאפס של $C_1(AB)$ גם כן סופי כסכום סופי של דברים סופים (יהיו לכל היותר $M\cdot n$ איברים שונים מאפס).

קיבוציות ־ נובע מקיבוציות של כפל מטריצות.

יחידה־ $I=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

(ב) עבור $G\ni\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}=A$ הוכח כי אין לה הופכי משמאל ומצא את כל ההופכים מימין שלה.

פתרון : אין הפיכות משמאל ־ צ"ל שלא קיימת $B\in G$ כך ש $BA=I$. ואכן לכל $B\in G$ מתקיים כי $C_1(BA)=B\cdot C_1(A)=B\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\end{pmatrix}=0$

הפיכות מימין ־ צ"ל $B\in G$ כך ש $AB=I$. נחשב: לכל i מתקיים כי $R_i(I)=R_i(AB)=R_i(A)\cdot B=R_{i+1}(B)$

ולכן $\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$ $B =$ כאשר השורה הראשונה של B מכילה רק מספר סופי של איברים שונים מאפס.