

**תרגיל בית 3 פונקציות מרוכבות למתמטיקה – לוגים, חזקות ואינטגרלים**  
**מסוג שני, כולל משפט הערכת האינטגרל**

**שאלה 1**

יהי  $L$  ענף אנליטי של  $\log$  בתחום  $\mathbb{C}$  פחות העקום  $te^{it}$  כאשר  $0 \leq t < \infty$ . אם  $L(1) = 0$  חשבו את  $L(-5)$ ,  $L(17)$ .

**שאלה 2**

הוכיחו שלפונקציה הרב-ערכית  $\log(z)$  אין ענף אנליטי בתחום  $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**שאלה 3**

כמה ענפים אנליטיים יש לפונקציה  $f(z) = \sqrt[3]{\sqrt{z} + 1}$  בתחום  $D$  שהוא חצי המישור הימני?

**שאלה 4**

יהי  $\text{Log}$  הענף העיקרי (הראשי) של הלוגריתם בתחום  $\mathbb{C} \setminus \{-t \mid t \geq 0\}$ .

א. הראו כי לכל  $z$  בתחום ההגדרה של  $\text{Log}$  מתקיים

$$\text{Log} \frac{1}{z} = -\text{Log} z$$

ב. הראו שכלל זה לא בהכרח נכון עבור ענפים אחרים של הלוגריתם.

**שאלה 5**

מצאו את כל הערכים האפשריים של הביטויים הבאים:

א.  $(1+i)^{2i}$

ב.  $(-i)^{-i}$

ג.  $\text{Im}((1-i)^{1+i})$

ד. מצאו את כל הערכים האפשריים עבור  $1^{a+ib}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**שאלה 6**

הראו שחוק החזקות  $e^{zw} = (e^z)^w$  נכשל (כאשר החזקה מוגדרת עם הענף הראשי של הלוגריתם) ע"י בחירת  $z, w$  מתאימים.

**שאלה 7**

פתרו את המשוואה  $e^{e^z} = 1$

**שאלה 8**

הוכיחו כי  $\left| \int_{\gamma} \frac{2-z}{2+\bar{z}} dz \right| \leq 3\pi + 6$  כאשר  $\gamma$  היא המסילה המורכבת מחצי מעגל היחידה העליון ומהקטע הישר מהנקודה  $-1$  לנקודה  $1$ .

**שאלה 9**

הוכיחו את אי השוויון  $\int_{\gamma} |e^z - e^{\bar{z}}| dz \leq 4e$  כאשר  $\gamma$  היא מסילה שמורכבת מהקטע הישר מ- $i$  עד  $0$  ואחר כך מהקטע הישר מ- $0$  עד  $1$ .

**שאלה 10**

חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int_{\gamma} (\sin(z) + \bar{z}) dz$$

כאשר  $\gamma$  היא המסילה המוגדרת על-ידי:

$$\begin{cases} e^{it} & -\pi \leq t \leq 0 \\ 1 - 2t & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**שאלה 11**

חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int_{\gamma} (z + \bar{z})(z - \bar{z}) dz$$

כאשר  $\gamma$  משולש בעל קודקודים ב- $0, 1$  ו- $i$ , המתואר נגד כיוון השעון.