פתרון תרגיל 1

11 במרץ 2018

1. א. מה מספר האפשרויות להושיב 16 אנשים כך ש־ 6 יושבים סביב שולחן עגול אחד והיתר סביב שולחן עגול אחר?

ב. מה מספר האפשרויות להושיב 16 אנשים כך ש־ 6 יושבים סביב שולחן עגול אחד והיתר על ספסל?

ג. בכיתה יש 30 תלמידים. רוצים לחלק להם כובעים לכבוד מסיבת פורים: 7 כובעי ליצן, 18 מצנפות שינה ו־5 סומבררוס, כך שכל תלמיד יקבל בדיוק כובע אחד. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

ד. מחלקת אבטחת מידע דרשה שסיסמאות המחשב תהיינה מורכבות מ־6 ספרות (מתוך 10 אפשריות) ו־12 אותיות (מתוך 52 אותיות האנגלית, גדולות וקטנות). כמה סיסמאות ניתן להרכיב?

<u>**פתרון:**</u>

א. מספר הדרכים לסדר n אנשים במעגל הוא $(n-1)!$. תחילה נבחר 6 אנשים מתוך 16 אנשים לשבת בשולחן הראשון, ויש $\binom{16}{6}$ בחירות שכאלו. אז נסדר 6 אנשים במעגל, ואת $16-6=10$ האנשים הנותרים גם נסדר במעגל. כלומר יש $\binom{16}{6}5!9!$ אפשרויות להושבת האנשים.

הערה: שימו לב שניתן לבחור תחילה את 10 האנשים שישבו בשולחן השני, והתוצאה זהה כי $\binom{16}{10}=\binom{16}{6}$.

ב.מספר הדרכים לסדר n אנשים בשורה הוא $n!$. תחילה נבחר 6 אנשים מתוך 16 אנשים לשבת בשולחן הראשון, ויש $\binom{16}{6}$ בחירות שכאלו. אז נסדר 6 אנשים במעגל, ואת $16-6=10$ האנשים הנותרים גם נסדר בשורה. כלומר יש $\binom{16}{6}5!10!$ אפשרויות להושבת האנשים.

ג. תחילה נבחר 7 סטונדטים מתוך 30 וניתן להם כובעי ליצן, ויש $\binom{30}{7}$ אפשרויות כאלו. אחר כך, מתוך $30-7=23$ הסטודנטים הנותרים נבחר 18 תלמידים שיחבשו מצנפות שינה, ויש $\binom{23}{18}$ אפשרויות כאלו. שאר הסטודנטים מוכרחים לקבל סומבררוס, הרי $\binom{5}{5}=1$. בסך הכל יש $\binom{30}{7}\binom{23}{18}\binom{5}{5}=\frac{30!}{7!\cdot 18!\cdot 5!}$ דרכים לבחירה. שימו לב שהתשובה

$\frac{30!}{7!18!5!}$ לא תלויה בסדר של בחירת קבוצות הכובעים. תרגיל זה הוא דוגמה למקדם המולטינומי. הסימון של מקדם זה הוא $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ כאשר $n = k_1+k_2+\ldots+k_m$, והוא סופר את מספר הדרכים לחלק n עצמים שונים (אצלנו 30 הסטודנטים) ל־m קבוצות (אצלנו שלושת סוגי הכובעים), כך שבקבוצה הראשונה יש k_1 עצמים, בקבוצה השנייה יש k_2 עצמים וכן הלאה.

ד. ראשית, נבחר את מיקום הספרות ב $\binom{18}{6}$, ואז יש 10^6 אפשרויות לחלק של הספרות ו 52^{12} לחלק של האותיות. סה"כ

$$\binom{18}{6} \cdot 10^6 \cdot 52^{12}$$

אפשרויות.

2. ועידת פרס רוצה לחלק סכום של $10,000$ ש"ח בין 10 זוכים. כמה אפשרויות עומדות לרשות הועידה אם:

א. הפרסים הם מספרים שלמים אי־שליליים.

ב. הפרסים הם מספרים טבעיים.

ג. הפרסים הם מספרים שלמים אי־שליליים בכפולה של 100 ש"ח.

<u>פתרון:</u>

א. השאלה שקולה למציאת מספר הפתרונות של המשוואה

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 10000$$

במספרים שלמים אי־שליליים. כלומר $\binom{10+10000-1}{10000} = \binom{10009}{9}$ דרכים.

ב. כאן אנו דורשים שבפתרונות למשוואה שבסעיף הקודם, יתקיים $x_i \geq 1$ לכל i. כלומר בכל תא יש לפחות כדור אחד. כלומר השאלה שקולה למספר הדרכים לחלוקה של $10000 - 10$ כדורים זהים לתוך 10 תאים, שהוא $\binom{9999}{9}$ דרכים.

ג. כל פיתרון של המשוואה מהסעיף הראשון, כאשר המשתנים כפולות של 100, הוא בחירה טובה, (וכל חלוקה של הפרס לכפולות של מאה היא בפרט חלוקה לשלמים אי שליליים, ולכן נמצאת בפיתרון סעיף ראשון). לכן נוכל לחלק את המשוואה לעיל ב־100, ולהגדיר משתנים חדשים $y_i = \frac{x_i}{100}$ עבור הפתרונות המתאימים שאנו יודעים שהם שלמים. לכן יש $\binom{10+100-1}{100} = \binom{109}{9}$ אפשרויות.

3. תהי A קבוצה מגודל n, ויהי R יחס סדר מלא (ליניארי) מעל A. חשבו את $|R|$.

<u>פתרון:</u>

ראשית היחס רפלקסיבי, ולכן לכל $a \in A$ נקבל aRa, וזה נותן לנו n איברים. בנוסף, לכל $a \neq b \in A$, בדיוק אחד מהזוגות $(a,b),(b,a)$ נמצא (הוא מלא לכן לפחות אחד מהם נמצא, והוא אנטי־סימטרי ולכן לא יכול להיות ששניהם נמצאים. לכן בדיוק

אחד). ולכן צריך להוסיף את כל הזוגות האפשריים ללא חשיבות לסדר וללא חזרה, ויש $\binom{n}{2}$ כאלה. סה"כ:

$$\binom{n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

4. א. כמה מספרים בין 1000 ל־10000 יש שסכום הספרות שלהם הוא 8?
ב. כמה מספרים בעלי n ספרות לכל היותר יש שסכום הספרות שלהם הוא 8?

<u>**פתרון:**</u>

א. זה שקול למספר הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ כך ש־$x_1 \geq 1 \wedge \forall i \in \{2,3,4\} : x_i \geq 0$. לכן נסמן $y_1 = x_1 - 1, \forall i \in \{2,3,4\} : y_i = x_i$. ונוריד מהתוצאה אחד, ונקבל את מספר הפתרונות למשוואה $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$ כך ש־$\forall i : y_i \geq 0$ ולכן יש $\binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7}$ מספרים כאלה.

ב. נשים לב שאם יש לנו מספר עם פחות מ־n ספרות נוכל להסתכל עליו כמספר עם n ספרות שהספרות השמאליות הן 0. לכן זה שקול למספר הפתרונות למשוואה $\sum_{i=1}^{n} x_i = 8$ כך ש־$\forall i : x_i \geq 0$ ולכן זה בדיוק $\binom{n+8-1}{8} = \binom{n+7}{8}$.

5. א. בכמה דרכים ניתן לבחור שני מספרים שונים בין 1 לבין 100 שסכומם זוגי?
ב. בכמה דרכים ניתן לבחור שלושה מספרים שונים בין 1 לבין 100 שסכומם זוגי?

<u>**פתרון:**</u>

א. צריך ששניהם יהיו זוגיים או ששניהם יהיו אי־זוגיים. לכל אפשרות יש לנו $\binom{50}{2}$ דרכים, ולכן סה"כ

$$2 \cdot \binom{50}{2}$$

ב. כאן או ששלושתם זוגיים ($\binom{50}{3}$ דרכים), או ששניים אי־זוגיים ואחד זוגי ($50 \cdot \binom{50}{2}$ דרכים). סה"כ:

$$\binom{50}{3} + 50 \cdot \binom{50}{2}$$