תרגיל בית 8 – טופולוגיה

שאלה 1

נניח ש $f:X\to Y$ פונקציה בין מרחבים טופולוגיים, $\{A_i : i\in I\}$ כיסוי פתוח של X ולכל $i\in I$ $f|_{A_i}:A_i\to Y$ רציפה. הוכיחו ש $f:X\to Y$ רציפה.

שאלה 2

קבעו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא פתוחה/ סגורה/ רציפה:

א. $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$.

ב. $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_2(x)=\chi_{\mathbb{Q}}=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

ג. $f_3:X\to\mathbb{R}$ עבור $X=[2,3]\cup[4,5)$ המוגדרת ע"י $f_3(x)=\begin{cases}1 & x\in[2,3]\\ x & x\in[4,5)\end{cases}$.

שאלה 3

תהי $f:X\to Y$ פונקציה בין שני מרחבים טופולוגיים. ניתן לראות את $f(X)$ כתת מרחב טופולוגי של Y.

א. הוכיחו שאם f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- Y אזי היא פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- $f(X)$.

ב. הראו ע"י שתי דוגמאות נגדיות שמהעובדה ש- f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- $f(X)$ לא נובע ש- f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- Y.

שאלה 4

תהי X קבוצה לא ריקה עם הטופולוגיה הקו-סופית. האם המרחב $(X,\tau_{cofinite})$ קשיר? (רמז: תלוי בעוצמה של X).

שאלה 5

תזכורת – הישר של סורגנפריי. נסמן ב-$\mathbb{R}_\ell$ את $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הבאה T:

$O\in T$ אמ"מ O היא איחוד של קטעים מהצורה $[a,b)$ (כולל איחוד ריק).

א. הוכיחו כי מרכיבי הקשירות של $\mathbb{R}_\ell$ הם הנקודונים.

כלומר, הראו שאם A הוא תת מרחב בעל יותר מנקודה אחת, אזי הוא אינו קשיר.

ב. מצאו את כל הפונקציות הרציפות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_\ell$. כלומר, קבעו אילו פונקציות הן רציפות והוכיחו גם שהפונקציות שלא נכנסו לרשימה שלכם – הן אינן רציפות.

שאלה 6

יהי $(X,\|\ \|)$ מרחב נורמי, $a\in X, c\in\mathbb{R}$. הוכיחו שהפונקציות הבאות רציפות:

1. העתקת הנורמה- $f:(X,\|\ \|)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=\|x\|$ (שני המרחבים הם מרחבים מטריים).
2. הזזה- $g:(X,\|\ \|)\to(X,\|\ \|)$ המוגדרת ע"י $g(x)=x+a$.
3. כפל בסקלר- $h:(X,\|\ \|)\to(X,\|\ \|)$ המוגדרת ע"י $h(x)=cx$.
4. הסיקו כי כל כדור פתוח $B(a,\varepsilon)$ $(\varepsilon>0,\ a\in X)$ הומיאומורפי ל-$B(0,1)$.

בהצלחה!