חשבון אינפי 2 למדמ"ח

שיעור 2: סכומי רימן וסכומי דרבו- המשך. המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי

משפט 1: (תנאי רימן לאינטגרביליות)

$f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם ורק אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

א. $f(x)$ חסומה בקטע $[a,b]$

ב. $\lim\limits_{\max \triangle x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\sup\limits_{x\in I_k} f(x) - \inf\limits_{x\in I_k} f(x) \right) \triangle x_k = 0$.

תזכורת: משפחות של פונקציות אינטגרביליות:

א. פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$

ב. פונקציות מונוטוניות בקטע $[a,b]$.

ג. פונקציות חסומות ובעלות מספר סופי של נקודות אי רציפות בקטע $[a,b]$.

ד. פונקציות חסומות בעלות קבוצת בת מניה של נקודות אי רציפות בקטע $[a,b]$.

1. (שאלה ממבחן- תשע"ד)

הוכיחו שאם f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$, אז $|f|$ גם היא אינטגרבילית ב- $[0,1]$. רמז: ניתן להשתמש בעובדה הנובעת מאי שוויון המשולש:

$$\sup_{x\in I} |f(x)| - \inf_{x\in I} |f(x)| \le \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x)$$

הוכחה: נראה שפונקציה $|f|$ מקיימת את שני התנאים של משפט רימן לאינטגרביליות.

א. נתון ש- f אינטגרבילית ב- $[0,1]$ ולכן חסומה שם, כלומר קיים קבוע $M\in\mathbb{R}$ כך ש- $|f|\le M$ ולכן גם $|f|$ חסומה ב- $[0,1]$

ב. תהי T חלוקה כלשהי של הקטע $[0,1]$. נראה ש-

$$\lim_{\max \triangle x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x\in I_k} |f(x)| - \inf_{x\in I_k} |f(x)| \right) \triangle x_k = 0$$

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x\in I_k} |f(x)| - \inf_{x\in I_k} |f(x)| \right) \triangle x_k \le \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x\in I_k} f(x) - \inf_{x\in I_k} f(x) \right) \triangle x_k \xrightarrow[\max \triangle x_k \to 0]{} 0$$

הסכום הימני שואף ל-0, כי נתון ש- f אינטגרבילית ב- $[0,1]$ ולכן

$$\lim_{\max \triangle x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x \in I_k} |f(x)| - \inf_{x \in I_k} |f(x)| \right) \triangle x_k = 0 .$$

שני התנאים של משפט רימן לאינטגרביליות מתקיימים ולכן הפונקציה $|f|$ אינטגרבילית ב- $[0,1]$ כדרוש.

הגדרה : תהי $f(x)$ פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$ ותהי $T: a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ חלוקה של $[a,b]$. נסמן $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ כאשר $1 \le k \le n$, $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x), M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$.

הסכום $\underline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k$ נקראה **הסכום התחתון של דרבו**

הסכום $\overline{S}(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k$ נקראה **הסכום העליון של דרבו**

משפט 2 : (תכונת המונוטוניות של סכומי דרבו)

תהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ותהי $\{T_n\}$ סדרת החלוקות של קטע $[a,b]$ כך שכל חלוקה T_k מתקבלת מהחלוקה T_{k-1} ע"י תוספת נקודות (לכל $1 \le k \le n$).

אזי $\underline{S}(T_0) \le \underline{S}(T_1) \le ... \le \underline{S}(T_n) \le \int_a^b f(x)dx \le \overline{S}(T_n) \le \overline{S}(T_{n-1}) \le ... \le \overline{S}(T_0)$,

כלומר סדרת סכומי דרבו התחתונים מונוטונית עולה, סדרה סכומי דרבו העליונים מונוטונית יורדת ושתיהן מתכנסות לאינטגרל המסוים של $f(x)$ בקטע $[a,b]$.

משפט: $f(x)$ אינטגרבילית אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה T כך ש- $\left|\overline{S}(T) - \underline{S}(T)\right| < \varepsilon$

2. הוכיחו, כי

$$\sqrt{1-0.25^2} + \sqrt{1-0.5^2} + \sqrt{1-0.75^2} \le \pi \le 1 + \sqrt{1-0.25^2} + \sqrt{1-0.5^2} + \sqrt{1-0.75^2}$$

הוכחה: נתבונן בפונקציה $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ בקטע $[0,1]$.

זוהי פונקציה רציפה בקטע הנ"ל ולכן אינטגרבילית.

נבחר חלוקה : $T: 0 < 0.25 < 0.5 < 0.75 < 1$

$\triangle x = \frac{1}{4}$ לכל תת קטע

$f(x)$ מונוטונית יורדת בקטע הנ"ל ולכן

$\underline{S}(x)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}+\sqrt{1-1^2}\right)$ סכום דרבו תחתון, כי הערך המינימלי של הפונקציה בכל תת קטע מתקבל בקצה הימני שלו.

$\overline{S}(x)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0^2}+\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}\right)$ סכום דרבו עליון, כי הערך המקסימלי של הפונקציה בכל תת קטע מתקבל בקצה השמאלי שלו.

$\int_0^1\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{4}$ שטח של רבע עיגול יחידה.

לפי משפט 2 מתקיים: $\underline{S}(T)\le\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\le\overline{S}(T)$ ולכן

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}\right)\le\frac{\pi}{4}\le\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1-0.25^2}+\sqrt{1-0.5^2}+\sqrt{1-0.75^2}\right)$$

נכפול ב- 4 ונקבל את אי השוויון המבוקש.

3. (שאלה ממבחן- תשע"ג)
תהי f פונקציה מונוטונית עולה (ממש). סדרו את הערכים הבאים ע"פ סדר עולה מהנמוך ביותר לגדול ביותר:

א. $f(0)$

ב. $f(1)$

ג. $\frac{1}{3}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

ד. $\frac{1}{3}\left(f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f(1)\right)$

ה. $\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300}f\left(\frac{i-1}{300}\right)$

ו. $\frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300}f\left(\frac{i}{300}\right)$

ז. $\int_0^1 f(x)dx$

פתרון: בסיכומים של התרגול הקודם- תרגיל 1.24.

משפט 3: (המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי)

אם f רציפה בקטע $[a,b]$ ו- F היא פונקציה קדומה של f ב-$[a,b]$, כלומר $F'(x)=f(x)$ ב-$[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

רשימה של מספר פונקציות קדומות:

$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad n\neq 1$
$\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+c$
$\int \sin xdx=-\cos x+c$
$\int \cos xdx=\sin x+c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+c$
$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$
$\int e^x dx=e^x+c$
$\int \frac{1}{\cos x}\tan xdx=\frac{1}{\cos x}+c$
$\int \frac{1}{\sin x}\cot xdx=-\frac{1}{\sin x}+c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+c$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$

הערה שימושית: אם $F'(x)=f(x)$, אז $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)'=f(ax+b)$, כלומר אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$, אז $\frac{1}{a}F(ax+b)$ היא פונקציה קדומה של $f(ax+b)$.

4. השתמשו באינטגרל מסוים על מנת לחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+...+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+...+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

פונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ רציפה בקטע $[0,1]$ ולכן אינטגרבילית בו ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}$$

משפט 4: אם f ו- g אינטגרביליות ב-$[a,b]$ ולכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\geq g(x)$, אז $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$.

5. (שאלה ממבחן- תשע"ג)

הוכיחו כי אם $0<a<b$, אזי $\int_a^b \ln x\,dx\leq\frac{b^2-a^2}{2}$.

הוכחה: לכל $x\in[a,b]$ $(0<a<b)$ מתקיים $\ln x\leq x$ ולכן לפי משפט 4

$\int_a^b \ln x\,dx\leq\int_a^b xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2}$ כדרוש.

6. הוכיחו, כי $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\leq\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leq 2e^2$ **(פתרון בתרגול 1- תרגיל 1.14)**

7. הוכיחו, כי $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-R\sin x}dx<\frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)$ כאשר $R>0$. רמז: הוכיחו כי $\sin x>\frac{2}{\pi}x$ בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

הוכחה:

1. נראה ש- $\sin x>\frac{2}{\pi}x$ בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

נגדיר $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$. זוהי פונקציה רציפה בקטע סגור $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ולכן מקבלת ערך מינימלי ומקסימלי בקטע . נמצא את הערך המינימלי.

$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}=0$ ולכן $x=\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)$ נקודה חשודה לקיצון בקטע הנ״ל.

$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f\left(\arccos\frac{2}{\pi}\right)\approx 0.21>0$ ולכן הערך המינימלי של הפונקציה בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ הוא 0 ולכן $f(x)>0$ לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$ כלומר $\sin x>\frac{2}{\pi}x$ בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ כדרוש.

2. נוכיח, כי $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx<\frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)$ כאשר $R>0$.

$f(x)=e^{-R\sin x}$ פונקציה יורדת בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ והוכחנו ש- $\sin x>\frac{2}{\pi}x$ לכן

$e^{-R\sin x}<e^{-\frac{2}{\pi}Rx}$ בקטע הנ״ל ולכן

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}Rx}dx=-\frac{\pi}{2R}e^{-\frac{2}{\pi}Rx}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)$ כדרוש.