

# תרגיל תיאורטי 1 - אלגברה לינארית להנדסה - שבועות 1-3

**שאלה 1.1** תהי  $\theta$  זווית שאינה כפולה של  $2\pi$

1. הוכיחו:

$$\operatorname{cis} \theta + \operatorname{cis} 2\theta + \dots + \operatorname{cis} n\theta = \frac{\operatorname{cis} \theta - \operatorname{cis}((n+1)\theta)}{1 - \operatorname{cis} \theta}$$

רמז: השתמשו בנוסחא לסכום סדרה הנדסית.

2. הוכיחו:

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \frac{\sin \theta + \sin(n\theta) - \sin((n+1)\theta)}{2 - 2 \cos \theta}$$

העזרו כמובן בסעיף הקודם.

**שאלה 1.2** נתונה מערכת משוואות המיוצגת במטריצה. חלק מהערכים לא ידועים ומסומנים

ב  $a_1, \dots, a_9$

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & a_1 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ a_4 & 0 & a_5 & 2 & a_6 & 0 \\ a_7 & 0 & a_8 & 0 & a_9 & 0 \end{array} \right)$$

1. נתון שמטריצת המקדמים מדורגת. איזה ערכים לא ידועים זה מאפשר למצוא ומה הם? (רמז: יש 3 כאלה)

2. נתון שמטריצת המקדמים מדורגת קנונית. איזה ערכים זה מאפשר למצוא ומה הם? (רמז: יש עוד שניים שאפשר לקבוע).

3. אם בנוסף נתון שיש 2 משתנים חופשיים. איזה ערכים זה מאפשר למצוא ומה הם? (רמז: נשאר רק אחד שלא ניתן לקבוע).

4. מצאו את הפתרון הכללי של המערכת (עם תלות באיבר הלא ידוע שנשאר).

**שאלה 1.3** האם הכפל של המטריצות הבאות מוגדר? אם כן, מה תוצאת הכפל?

1.

$$\begin{pmatrix} 5 & -9 & 3 & 9 \\ 13 & -2 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 & 7 & 1 \\ 3 & -5 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -8 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 & 7 & 1 \\ 3 & -5 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -8 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad -2 \quad 3 \quad 4)$$

**שאלה 1.4** יהי  $n$  מספר טבעי ויהי  $a$  מספר ממשי או מרוכב. נסמן ב  $(a)_{i,j}$  מטריצה בגודל  $n \times n$  שבה כל האיברים הם 0 פרט למקום ה  $i, j$  שבו יש  $a$ . למשל אם  $n = 3$  אז

$$(4)_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי

$$(a)_{i,j} \cdot (b)_{k,r} = \begin{cases} (ab)_{i,r} & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

רמז: זה לא הכרחי, אבל יהיה נוח להעזר בכפל שורה-שורה וכפל עמודה-עמודה.

**שאלה 1.5** תהינה  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{F}^{n \times k}$  הוכיחו כי

$$(A \cdot B)^t = B^t A^t$$

שאלה 1.6 תהי

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

חשבו את  $A^{5777}$