מבוא לאלגברה לינארית - בוחן

24.4.2018

משך הבוחן: 45 דקות.

שאלה 1.

1. עבור המערכת

$$\begin{cases} x+2y+kz &= -1 \\ x-3z &= -3 \\ 2x+ky-z &= -4 \end{cases}$$

קבע את ערכי k כך שלמערכת יש

פתרון.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2-R_1\to R_2 \\ R_3-2R_1\to R_3 \\ \to \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k & -1 \\ 0 & -2 & -3-k & -2 \\ 0 & k-4 & -1-2k & -2 \end{pmatrix} \overset{(k-4)R_2+2R_3\to R_3}{\to}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k & -1 \\ 0 & -2 & -3-k & -2 \\ 0 & 0 & (-3-k)(k-4)-2-4k & -2(k-4)-4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k & -1 \\ 0 & -2 & -3-k & -2 \\ 0 & 0 & -k^2-3k+10 & -2k+4 \end{pmatrix}$$

(א) פתרון יחיד.

פתרון.

יש פתרון יחיד אם $-k^2-3k+10\neq 0$ כלומר $k\neq 2,-5$

(ב) אין פתרון.

פתרון.

אם נציב $k=-5$נקבל בשורה האחרונה סתירה $0=14$ ולכן אין פתרון

(ג) אינסוף פתרונות.

פתרון.
אם נציב $k=2$ נקבל בשורה האחרונה $0=0$ כלומר במטריצה יש שני איברים מובילים ו-3 נעלמים לכן יש אינסוף פתרונות.

שימו לב, רוב סטודנטים רשמו "קיימת שורת אפסים לכן יש אינסוף פתרונות", הנימוק הזה אינו נכון! הרי למערכת

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=1 \\ 3x+y=1 \end{cases}$$

המיוצגת על ידי המטריצה

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש שורת אפסים, אך בכול זאת בעלת פתרון אחד.
במקרה ומספר הנעלמים שווה למספר המשוואות אכן הנימוק נכון, ולכן לא ירדו נקודות.

2. הצב את הערך שקבלת בסעיף (1ג) ורשום פתרון כללי של המערכת.

פתרון.
אם $k=2$ אז מטריצה היא $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, לכן נציב t $z=$ מכאן $y=-\frac{5}{2}t+1$ ו- $x=3t-3$ כלומר הפתרון

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t-3 \\ -\frac{5}{2}t+1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 2.

1. האם $W=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y=z\right\}$ הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$. אם כן, הוכיחו שהוא תת מרחב. אם לא, הראו שלא.

פתרון. לא נכון, כן,

(א) צריך להוכיח ש- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$. כיוון ש- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ מקיים $x+y=0+0=0=z$ נקבל ש- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$

(ב) יהיו $v_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W$ צריך להוכיח ש- $v_1+\alpha v_2 \in W$.

$$v_1+\alpha v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+\alpha x_2 \\ y_1+\alpha y_2 \\ z_1+\alpha z_2 \end{pmatrix}$$

כלומר צריך להוכיח ש-

$$(x_1+\alpha x_2)+(y_1+\alpha y_2)=z_1+\alpha z_2$$

ואכן מתקיים

$$(x_1+\alpha x_2)+(y_1+\alpha y_2)=(x_1+y_1)+\alpha\left(x_2+y_2\right)=z_1+\alpha z_1$$

לכן $v_1+\alpha v_2\in W$.

2. מצא את המקום הגאומטרי של $z+\overline{z}+\mathrm{Im}\left(z\right)>\frac{\left|1+\sqrt{3}i\right|}{2}$.

פתרון. לא נכון, כן,

(א) נציב $z=a+bi$ ונקבל

$$\begin{gathered}z+\overline{z}+\mathrm{Im}\left(z\right)>\frac{\sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}{2}\\ \Downarrow\\ a+bi+a-bi+\mathrm{Im}\left(z\right)>\frac{\sqrt{4}}{2}\\ \Downarrow\\ 2a+b>\frac{\sqrt{4}}{2}\\ \Downarrow\\ b>-2a+1\end{gathered}$$

כלומר המקום הגאומטרי הוא כל הנקודות שמעל הקו $y=-2x+1$

בהצלחה!!