תרגול 10 – אנליזה מודרנית

תזכורת: פונקציונאל לינארי $T: X \to X$ כאשר X הינו מרחב בנך יקרא חסום אם $\sup_{x\in X}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x\in X, \|x\|=1}\|Tx\| = M < \infty$.

משפט: פונקציונל לינארי הינו חסום אמ"מ הוא רציף.

הוכחה:

$\Leftarrow$: נניח כי הפונקציונל הינו חסום. אזי מתקיים שאם $\|x_n - x\| \to 0$ אזי $T(x_n - x) \le \|x_n - x\| M \to 0$ ולכן הפונקציונל רציף.

$\Rightarrow$: נניח כי הפונקציונל רציף. אז בהכרח הוא רציף ב 0 ולכן קיימת $\delta > 0$ כך שאם $\|y\| < \delta$ אז $\|T(y)\| \le 1$. מכאן ש

$$\left\| T\left(\frac{\|x\|}{\delta}\left(\frac{\delta}{\|x\|}x\right)\right)\right\| = \frac{\|x\|}{\delta}\left\| T\left(\left(\frac{\delta}{\|x\|}x\right)\right)\right\| \le \frac{\|x\|}{\delta}$$

ומכאן כי הפונקציונל חסום.

1. נגדיר $T: C([0,1]) \to \mathbb{R}$ ע"י $T[f] = f(0)$. הוכיחו שאם נגדיר על $C([0,1])$ את הנורמה הרגילה, אז T רציף, אבל אם נגדיר על $C([0,1])$ את נורמת L^2 ביחס למידת לבג, אז T לא רציף.

פתרון: נתחיל מהמקרה שעל $C([0,1])$ מוגדרת הנורמה הרגילה ($\|f\| = \max_{0\le x\le 1}|f(x)|$). כדי להוכיח רציפות נסתמך על המשפט הקודם, ונוכיח כי $\|T\| < \infty$ (כלומר T חסומה). ובכן, לכל f המקיימת $\|f\| = 1$ מתקיים $\max_{0\le x\le 1}|f(x)| = 1$ ולכן $|f(0)| \le 1$ או $|T[f]| \le 1$. מכאן שכל איברי

הקבוצה $\left\{\|T[f]\|_{\mathbb{R}} : \|f\|=1\right\}$ חסומים מלעיל ע"י אחד, ולכן
$\|T\| = \sup\left\{\|T[f]\|_{\mathbb{R}} : \|f\|=1\right\} \le 1 < \infty$ כנדרש.

נניח כעת כי על $C([0,1])$ מוגדרת נורמת L^2 ביחס למידת לבג ($\|f\| = \left(\int_0^1 |f|^2\, dm\right)^{1/2}$) ויש להפריך את הרציפות. דרך מומלצת לעשות זאת היא ע"פ היינה: נמצא סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת לפונקציית האפס בנורמת L^2 , אבל $T[f_n] \not\to T[0] = 0$ ב- $\mathbb{R}$. ניקח סדרה כדלהלן
$f_n(x) := \begin{cases} 1-nx & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$. נחשב

$$\|f_n - 0\| = \left(\int_0^1 |f_n - 0|^2\, dm\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 |f_n|^2\, dm\right)^{1/2} = \left(\int_0^{1/n} |1-nx|^2\, dm(x)\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_0^{1/n} \left(1 - 2nx + n^2x^2\right) dm(x)\right)^{1/2} = \left(x - nx^2 + n^2 \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=1/n}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3n}} \to 0$$

לכל n $T[f_n] = f_n(0) = 1$ ולכן $T[f_n] \to 1 \ne 0$.

תזכורת: יהי X מ"ו, מ"פ על X היא פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ המקיימת

- לינאריות ברכיב הראשון $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle$
- הרמיטיות $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$ ב- $\mathbb{C}$ – או סימטריות $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$ ב- $\mathbb{R}$
- חיוביות $\langle v, v\rangle \ge 0$ עם שוויון $\Leftrightarrow$ $v = 0$

נובע: אנטי לינאריות ברכיב השני $\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle + \overline{\beta}\langle u, w\rangle$ (לינאריות ב- $\mathbb{R}$)

2. הראו כי נורמת המקסימום במרחב $C([a,b])$ אינה מושרית מאף מכפלה פנימית.

פתרון: נפריך את זהות המקבילית $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right)$. בהרצאה הוכח שאם הנורמה מושרית ע"י מכפלה פנימית, אזי זהות המקבילית חייבת להתקיים.

נגדיר $f, g \in C([a,b])$ ע"י ציור [f מתחילה ב-1, ויורדת לינארית עד שמגיעה ל0 באמצע הקטע – ומשם נשארת אפס. g מתחילה ב-0, נשארת 0 עד אמצע הקטע ועולה משם לינארית עד 1].

מתקיים $\|f+g\|^2=\|f-g\|^2=\|f\|^2=\|g\|^2=1$ אם נציב בזהות המקבילית נקבל $1+1=2(1+1)$ וזה לא נכון.

תזכורת (משפט ההצגה של ריס): אם L הינו פונקציונאל רציף על מרחב הילברט H אזי $Ly=\langle x,y\rangle$ עבור איזשהו $x\in H$.

3. תרגיל(ממבחן תש"ע מועד ב'): נגדיר $M\subset l^2$ להיות תת המרחב שמכיל בדיוק את כל הסדרות $\{a_n\}\in l^2$ כך ש $a_n=0$ פרט למספר סופי של אינדקסים. אז M הוא מרחב מכפלה פנימית לא שלם(אין צורך להוכיח). הראו ע"י דוגמה כי משפט ההצגה של ריס נסתר ב M .

פתרון: נגדיר את הפונקציונאל $L\{y_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{n}$, קל לראות כי L לינארי וכן הינו רציף שכן הוא חסום. כעת נניח כי $Ly=\langle x,y\rangle$ עבור $x\in M$ כלשהו. מכיוון ש $x\in M$ נובע כי קיים $N>0$ כך ש $x(k)=0$ עבור $k>N$. ניקח סדרה $y^n=\begin{cases}\frac{1+n}{n} & N+1\\ 0 & otherwise\end{cases}$, אזי $y^n\to y$ כאשר $y(k)=\delta_{N+1}(k)$. ברור כי $L\{y_n\}\to\frac{1}{N+1}$ אבל $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}x(i)y(i)=0$ ומכאן סתירה.

4. שני סעיפים ממבחן תשע"ב מועד ב' :
   א. הגדירו את l^p עבור $1\le p\le\infty$ והראו כי $l^p\subset l^\infty$.
   ב. הוכיחו שאם נשרה את נורמת l^∞ על l^1 אז הוא לא מרחב שלם.

פתרון:

א. נדלג על ההגדרה. ברור כי על מנת שהטור $\sum|x|^p$ יתכנס חייב להתקיים כי $\sup x_n<\infty$.

ב. ניקח את הסדרה $x^n=\begin{cases}1/i & 1\le i\le n\\ 0 & otherwise\end{cases}$, קל לראות כי היא קושי ב l^∞ אבל לא מתכנסת לאיבר ב l^1 .

5. הוכיחו כי $\langle A,B\rangle := trace\left(AB^*\right)$ מהווה מכפלה פנימית על מרחב המטריצות המרוכבות $\mathbb{C}^{m\times n}$ (תזכורת: $B^* = \overline{A^T}$)

פתרון: נוכיח את קיום התנאים

- $$\langle \alpha A+\beta B,C\rangle = Trace\left(\left(\alpha A+\beta B\right)C^*\right) = Trace\left(\alpha AC^* + \beta BC^*\right)$$
$$= Trace\left(\alpha AC^*\right) + Trace\left(\beta BC^*\right) = \alpha Trace\left(AC^*\right) + \beta Trace\left(BC^*\right) = \alpha\langle A,C\rangle + \beta\langle B,C\rangle$$

- $$\langle B,A\rangle = Trace\left(BA^*\right) = Trace\left(\left(BA^*\right)^T\right) = \overline{Trace\left(\overline{\left(BA^*\right)^T}\right)}$$
$$= \overline{Trace\left(\overline{A^{*T}B^T}\right)} = \overline{Trace\left(AB^*\right)} = \overline{\langle A,B\rangle}$$

- $$\langle A,A\rangle = Trace\left(AA^*\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(AA^*\right)_{kk} = \sum_{k=1}^{m} R_k\left(A\right)\bullet C_k\left(A^*\right) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\overline{a_{kl}} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\left|a_{kl}\right|^2 \geq 0$$

ויש שוויון או"א כל אברי המטריצה הם אפס – כלומר אם $A=0$.