

## תרגיל בית 4

1. תנו דוגמא לפונקציה  $f$  שאינה מדידה לבג אבל  $|f|$  כן מדידה לבג.

פתרון: ניקח את  $f = 1_E - 1_{E^c}$  כאשר  $E$  הינה הקבוצה הלא מדידה לבג שראינו מתחילת הקורס. ברור כי  $f$  איננה מדידה שכן  $f^{-1}(1) = E$  וזו קבוצה לא מדידה לבג. כעת נשים לב כי  $|f| = 1$  זו כמובן פונקציה אינדיקטור שניתן לרשום  $f = 1_{\mathbb{R}}$  וזו כמובן קבוצה מדידה.

2. תהי  $\{A_i\}$  סדרה של קבוצות זרות במרחב מדיד  $(X, S)$ .

i. יהיו  $\{g_i\}_{i \geq 1}$  סדרה של פונקציות על  $X$  המדידות  $S$ . הראו כי  $\sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i} g_i$  מתכנסת

ומדידה  $S$ .

ii. נניח כי  $\bigcup_n A_n = X$ . תהי  $\mathcal{G} = \sigma(\{A_i : i \geq 1\})$  ופונקציה  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ . הראו כי  $h$  מדידה אמ"מ  $h$  קבועה על כל  $A_i$ .

פתרון:

i. נסמן ב  $G_M(x) = \sum_{i=1}^M 1_{A_i}(x) g_i(x)$ , זוהי סדרה של פונקציות מדידות. נסמן גם

$G = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i} g_i$ , קל לראות כי  $G_M$  מתכנסת ל  $G$ . מכאן ש  $G$  מדידה כגבול של

פונקציות מדידות.

ii.  $\Rightarrow$  : אם  $h$  קבועה על כל  $A_i$  ב  $c_i$ , הערך של  $h$  על  $A_i$  אזי ברור כי  $h = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i}(x) c_i$

הינה מדידה עפ"י הסעיף הראשון.

$\Leftarrow$  : לא קשה להראות (בידקו תכונות) כי מכיון ש  $A_i$  זרות ואיחודן הוא כל  $X$  אזי

משפחת הקבוצות  $C = \{E \mid E = \bigcup_{i \in J} A_i, J \subseteq \mathbb{N}\}$  הינה סיגמא אלגברה המכילה את

$A_i$  ולכן  $\mathcal{G} \subseteq C$ . אם  $h$  איננה קבועה על איזשהו  $A_i$  אזי היא מקבלת לפחות 2

ערכים שונים על  $A_i$ , נניח שאחד מהם הוא  $y$ , אזי  $D = h^{-1}(y) \cap A_i \subset A_i$  (מוכל

ממש). מכיוון ש  $D$  מוכלת ממש ב  $A_i$  נובע כי  $D \notin C$  ומכאן ש  $h^{-1}(y)$  איננה מדידה  $\mathcal{C}$ .

3. יהי מרחב מדיד  $(X, S)$  ועליו מוגדרות הפונקציות המדידות  $f_1, f_2$  ו  $f_3 : X \rightarrow \mathbb{R}$  (  $i = 1, 2, 3$  ). התבוננו במשוואה הבאה

$$f_1(x)t^2 + f_2(x)t + f_3(x) = 0$$

זוהי משוואה ריבועית ב  $t$  לכל  $x \in X$ .

הראו כי  $A = \{x \in X : \text{the equation has two distinct roots}\}$  הינה מדידה  $S$ .

פתרון: נשים לב כי  $A = \{x \in X : f_2^2 - 4f_1f_3 > 0\}$ . ראינו כבר כי פונקציות מדידות סגורות תחת כפל וחיבור ולכן  $f_2^2 - 4f_1f_3$  הינה פונקציה מדידה  $S$  ומכאן ש  $f_2^2 - 4f_1f_3 > 0$  הינה קבוצה מדידה  $S$ .

4. יהי מרחב מדיד  $(X, S)$  ויהיו  $f, g$  פונקציות מדידות  $S$  המקבלות ערכים ב  $\mathbb{R}$ . הראו כי

$$\text{הפונקציה } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} 1_{(g(x) \neq 0)}$$

פתרון: ללא הגבלת הכלליות נניח כי  $\alpha < 0$ , אחרת אתם כבר יודעים מה לעשות..

$$\begin{aligned} h^{-1}((-\infty, \alpha)) &= \{x \in X \mid \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) < g(x)\alpha\} \cap \{g(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) > g(x)\alpha\} \cap \{g(x) < 0\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) - g(x)\alpha < 0\} \cap \{g(x) > 0\} \cup \{x \in X \mid f(x) - g(x)\alpha > 0\} \cap \{g(x) < 0\} \end{aligned}$$

מכיוון שהפונקציה  $f - \alpha g$  הינה מדידה נקבל כי הקבוצה לעיל מדידה ומכאן ש  $h$  מדידה.