

מבוא לחוגים ומודולים (88212)

מבחן מסכם, מועד א'

סמסטר ב' תשפ"א

יש לענות על השאלה הראשונה, על כל סעיפיה, ועל שלוש מן השאלות 2-5, ולתת נימוקים מלאים לכל התשובות. אין צורך להוכיח טענות שהוכחו בשיעור או בתרגול, אך צריך להיות ברור באיזו טענות השתמשתם. סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתיחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד.

משך הבחינה: שלוש שעות. כל חומר עזר כתוב או מודפס מותר, שימוש בכל מכשיר אלקטרוני אסור. בהצלחה!

1. יהי R חוג, לא בהכרח חילופי. תנו דוגמאות נגדיות לטענות הבאות, והסבירו מדוע הן מפריכות את הטענות.

(א) $Z(R)$ הינו אידאל של R .

(ב) יהיו M, N מודולים R -מודולים. אם $\text{Ann}_R(M) = \text{Ann}_R(N)$, אזי $M = N$.

(ג) יהי $I \triangleleft R$. אזי $R \simeq I \times R/I$.

(ד) אם R חוג חילופי נתרי, אזי $\dim R \leq 2$.

2. לאילו ערכים $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים שהחוג $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - x^2 + ax - 1)$ הינו שדה?

3. יהי M מודול מעל החוג R ויהי $N \leq M$ תת-מודול. אומרים כי N הינו מחובר ישר של M אם קיים תת-מודול $L \leq M$ כך ש- $M \simeq N \times L$. הוכיחו כי N הינו מחובר ישר אם ורק אם קיים הומומורפיזם $f: M \rightarrow N$ כך ש- $f(n) = n$ לכל $n \in N$.

4. תארו את כל ה- $\mathbb{Z}[i]$ -מודולים M הנוצרים סופית המקיימים

$$\text{Ann}_{\mathbb{Z}[i]}(M) = (5).$$

5. יהי R תחום שלמות. הוכיחו כי $R[x]$ הינו תחום דדקינד אם ורק אם R שדה.