

## תרגיל לעבודה עצמית 9

### שאלה 1

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

### פתרון

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 + 14 + 7 = 14$$

### שאלה 2

הפיקה. יהיו  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  שלא כולם שווים ל 0. הוכח שהמטריצה

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$$

### פתרון

$$\det = -(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \neq 0$$

### שאלה 3

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה  $\in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

### פתרון

נבצע על העמודות את הפעולות האלמנטריות הבאות:  $C_1 \leftrightarrow C_n, C_2 \leftrightarrow C_{n-1}, C_3 \leftrightarrow C_{n-2}, \dots$ . כל חילוף מכפיל את הדטרמיננטה ב -1.

נקבל את המטריצה - מטריצת היחידה בגודל  $n$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \begin{cases} 1 & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ even} \\ -1 & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ odd} \end{cases}$$

### שאלה 4

פתור את מערכת המשוואות בעזרת כלל קרמר.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$$

### פתרון

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$N_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$N_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -(-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$N_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{0}{3} = 0; y = \frac{N_y}{D} = \frac{9}{3} = 3; z = \frac{N_z}{D} = \frac{9}{3} = 3$$

### שאלה 5

$$.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ חשב את המטריצה הצמודה למטריצה}$$

### פתרון

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7; A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7; A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1; A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5; A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$.adjA = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & -3 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

### שאלה 6

$$.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ מצא את המטריצה ההופכית למטריצה}$$

### פתרון

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & -3 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \text{ ראינו ש } adjA = \frac{1}{|A|} \text{ משאלות 1,6 נקבל}$$