אינדוקציה

שלבים בהוכחה באינדוקציה

1. בודקים את נכונות הטענה עבור $n=1$
ע"י שמציבים 1 במקום n
(אם הטענה נכונה רק החל מ- $n=m$
כאשר $1<m$ אז בודקים את הטענה
עבור m)

2. מניחים את הנחת האינדוקציה, כלומר
מניחים שהטענה נכונה עבור n.

3. מוכיחים את נכונות הטענה עבור $n+1$
בהסתמך על הנחת האינדוקציה עבור n.

דוגמאות:

1. הוכיחו באינדוקציה:

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}\le 2-\frac{1}{n}$$

בדיקת נכונות הטענה עבור $n=1$:

אגף שמאל: $\frac{1}{1!}=1$

אגף ימין: $2-\frac{1}{1}=1$

$1=1$ ✓

2. נניח את נכונות הטענה עבור n
כלומר נניח שמתקיים

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\le 2-\frac{1}{n}$$

3. ~~נוכיח~~ נוכיח עבור $n+1$

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\le 2-\frac{1}{n+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{2-\frac{1}{n}}_{\text{הנחת האינדוקציה}}+\frac{1}{(n+1)!}\le 2-\frac{1}{n+1}$$

⇕

$$\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

⇕

$$0 \le -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-1+(n-1)!}{(n-1)!\,n(n+1)}$$

⇕

$$0 \le -1 + (n-1)!$$

⇕

$$\underbrace{1 \le (n-1)!}_{\text{נכון לכל } n \text{ טבעי}}$$

לכן הטענה נכונה עבור $n+1$.

<u>שאלה 2</u>

הוכחה באינדוקציה:

$$n < \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

בדיקת נכונות הטענה עבור $n=1$:

$$n < \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$1 < \left(\frac{3}{2}\right) \checkmark$$

נניח את נכונות הטענה עבור n כלומר נניח שמתקיים:

$$n < \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

נוכיח עבור $n+1$:

$$n+1 < \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$$

⇕

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1 < \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)$$

$\Updownarrow$

$1 < \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$\Updownarrow$

$1 < \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2}$

$\Updownarrow$

$\underbrace{2 < \left(\frac{3}{2}\right)^n}_{\text{נכון לכל } n \geq 2}$

לכן הכלל נכון עבור $n+1$.

<u>שאלה לסדרות</u>

נניח ש $a_n \to 0$ ונניח של סדרה b_n
אין גבול ממשי. מה ניתן לומר על גבול
הסדרה $a_n \cdot b_n = c_n$?

<u>פתרון</u> שום דבר. (ראה מספר דוגמאות.

א. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n$

אזי $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

ב. אזי $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = n$

$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$

ג. אזי $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n \cdot n$

$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$

הגבול לא ק"ם

ד. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n^2 \cdot (-1)^n$

אזי $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$

<u>טענה:</u> אם $a_n \to 0$ ו- b_n חסומה, אזי
$$a_n \cdot b_n \to 0$$

<u>דוגמה:</u>
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{\ln(n)} = 0$$

כי $|\sin(n)| \le 1$, $\frac{1}{\ln(n)} \to 0$

<u>משפט הסנדוויץ'</u>

אם מתקיים $a_n \le b_n \le c_n$ לכל ו גדול ם.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$
אזי
$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

<u>תרגיל:</u>

מצאו את הגבול של $a_n = (2^n+3^n)^{1/n}$

<u>פתרון</u>

מתקיים
$$\underset{\to 3}{3} = (3^n)^{1/n} \le (2^n+3^n)^{1/n} \le$$
$$\le (2\cdot 3^n)^{1/n} = \underbrace{2^{1/n}\cdot 3}_{\to 3}$$

לכן הגבול של a_n הוא 3

<u>הערה</u> תזכורת:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad , a>0$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

5 תרגול חשבו:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+(-1)^n+7^n}$$

$$7 = \sqrt[n]{7^n} \le \sqrt[n]{3^n+(-1)^n+7^n} \le \sqrt[n]{3\cdot 7^n} = \sqrt[n]{3}\cdot 7$$

$$7 \to 7, \quad \sqrt[n]{3^n+(-1)^n+7^n} \to 7, \quad \sqrt[n]{3}\cdot 7 \to 7$$

תרגול חשבו את הגבול של:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to 1, \quad \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \to 1, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to 1$$

משפט חצי סנדוויץ' (סנדוויץ' = מורחב)
(ב- ∞)

אם $a_n \to \infty$ והחל ממקום מסוים $a_n \le b_n$ אזי $b_n \to \infty$

דוגמה: חשבו

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$$

פתרון:

$$n! \ge \underbrace{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdots\frac{n}{2}}_{\frac{n}{2}\text{ פעמים}} = \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}$$

ולכן

$$\sqrt{\frac{n}{2}} \le \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} \le \sqrt[n]{n!}$$

$$\sqrt{\frac{n}{2}} \to \infty, \quad \sqrt[n]{n!} \to \infty$$

⑥ ארגל (של סנוויצ' -ארגל)
כלל מרחב

חשב

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}}$$

נשים לב:

$$1 < \frac{n+1}{n-1} < 2$$

לכן, לכל $n>4$

$$\sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{\frac{n+1}{n-1}} \le \sqrt[n]{2}$$

ארגל

(את ארגל לא הוספתי כאן
אבל אציג לגבי ל-ארגות סמוך
מאחר שלמדנו את הגבול של $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

משפט

נוכיח את הגבול של $a_n = \frac{n^n}{n!}$

הוכחה נוכיח באינדוקציה ש

$$n+1 \le \frac{n^n}{n!}$$

החל ממקום מסוים.
או באופן שקול ש-

$$(n+1)! \le n^n$$

עבור $n=3$ הטענה נכונה
נניח נכונות ל- n ונוכיח עבור $n+1$

כלומר יש להראות ש

$$(n+2)! \le (n+1)^{n+1}$$

$$(n+1)!\,(n+2) \le (n+1)^n(n+1)$$

$$(n+1)!\,(n+2) \le (n+2)\cdot n^n$$ מאד"ם

לכן מספיק להראות

$$(n+2)\,n^n \le (n+1)^n(n+1)$$

$$\frac{n+2}{(n+1)} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\frac{n+2}{(n+1)} \to 1 \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

ומכיוון ש $1<e$, ~~[illegible]~~

לכן - החל ממקום מסוים מאד"ם כי השוויון דברוע.

- החל ממקום מסוים

$$n+1 \le \frac{n^n}{n!}$$

לפי משפט הסנדוויץ' - מתרחב נדבקים שהגבול הוא סופי.