מערכות משוואות ליניאריות

מערכת משוואות ליניאריות בת n משתנים עם m משוואות הינה מערכת מהצורה

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1$$

מס' משוואה   איבר מקדם

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m,1} + a_{m,2} + \dots a_{m,n}x_n = b_m$$

ניתן לייצג כל מערכת כזו באמצעות טבלת מספרים הנקראת מטריצה

דוגמא:

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ y-z=2 \\ x+2y+z=4 \end{cases} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & b \end{array} \\ \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

פעולות שניתן לעשות בלי לשנות את פתרונות מערכת המשוואות:

* כפל של איברי המשוואה במס' שונה מאפס

$$2R_1 \rightarrow R_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

* חיבור של איברי משוואה אחת כפול קבוע, לשני איברי משוואה שניה

$$R_3 - R_1 \rightarrow R_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

* החלפת סדר המשוואות

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

דירוג גאוס:

איבר **מוביל/פותח/ציר** הינו האיבר הראשון בשורה ששונה מאפס (משמאל לימין). מטריצה נקראת **מדורגת** אם מתחת לכל איבר מוביל שלה יש אפסים בלבד וכל איבר מוביל נמצא מימין לאיברים המובילים הקודמים. בנוסף, יש את הדרישה כי שורות אפסים (אם קיימות) נמצאות בסוף. מטריצה נקראת **מדורגת קנונית** אם היא מדורגת, ובנוסף יש אפסים **מעל** לכל איבר מוביל והאיברים המובילים חייבים להיות שווים למספר אחד.

הערה: לכל מטריצה **קיימת** צורה קנונית **יחידה**.

ציר

$$\begin{pmatrix} * & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & * & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & * & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

איך מדרגים? גאוס

שלבים - בגדול:

1. מוצאים שורה שהאיבר הראשון שלה שונה מ-0. (נגיד שורה i, $a_{i,1}\neq 0$)
2. מחליפים את שורה i עם שורה 1
3. נחלק את השורה הראשונה (שהייתה פעם i) ב $a_{i,1}$ (קיבלנו שורה עם ציר $=1$)
4. נחסר מכל שורה j את שורה 1 כפול $a_{j,1}$ כדי לקבל אפסים בעמודה 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-3R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

קיבלנו עמודה $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

5. חוזרים על 1-4 עבור שאר העמודות

פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad R_1 \cdot \tfrac{1}{2} \longrightarrow R_1$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \multicolumn{4}{c}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)} \end{array}$$

$1z = 1$,

כיוון שיש משתנה חופשי נסמן אותו ב t ונמצא את קבוצת הפתרונות

$y = t$

$1 \cdot x + 2t = \frac{1}{2} \longrightarrow x = \frac{1}{2} - 2t$

$\boxed{\text{קבוצת הפתרונות} \quad \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}}$

תרגיל

פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \cdot \frac{1}{2} \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(פתרון) $X = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - \frac{1}{4}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

כיון שקיבלנו שורת אפסים עם פתרון $\neq 0$ קיבלנו סתירה ולכן אין פתרון

תרגיל

פתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{C}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1-2i & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2+iR_1\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} i & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1+i & 5+3i \end{array}\right)\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i, & 0, & -1-2i & -7-6i \\ 0, & 1, & 1+i & 5+3i \end{array}\right)\xrightarrow{R_1\cdot -i\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & i-2 & 7i-6 \\ 0, & 1, & i+1 & 5+3i \end{array}\right)$$

נעביר למשוואות:

$$x+(i-2)z=7i-6$$
$$y+(1+i)z=5+3i$$

נסמן את המשתנה החופשי t

$$x=7i-6-(i-2)t=(7-t)i-6+2t$$
$$y=5+3i-(1+i)t=(3-t)i+5-t$$

$$\left\{\begin{pmatrix}(7-t)i-6+2t \\ (3-t)i+5-t \\ t\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{C}\right\}$$

תרגיל

פתרו את המערכת

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = -1 \\ x - 3y + 3z = 9 \\ -2x + 4y - 24z = -14 \end{cases}$$

ואת פתרו את המערכת

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = -1 \\ x - 3y + 3z = 9 \\ -2x + 4y - 24z = -24 \end{cases}$$

מעל הממשיים

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 9 \\ -2 & 4 & -24 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 8 \\ -2 & 4 & -24 & -14 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 + 2R_1 \to R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & -26 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 - 6R_2 \to R_4]{R_3 + 4R_2 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & -20 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{20} \cdot R_4 \to R_4]{\frac{1}{8} \cdot R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0.3 \end{array}\right)$$

אם נחסר את R_4 מ-R_3 (או ההפך) נקבל שורת סתירה (אפסים עם פתרון $\neq 0$)

בסעיף ב' של התרגיל — פתרון יחיד (תעשו בבית)

מספר פתרונות:

כל הדברים הבאים מתייחסים <u>לצורה המדורגת</u>

* משתנה שבעמודתו יש איבר ציר נקרא משתנה תלוי
* שאר המשתנים ← חופשיים
* אם יש שורת סתירה, אין פתרונות למערכת
* אם אין שורת סתירה ← $\text{מס' פתרונות} = \left(\text{מס' איברים בשדה}\right)^{\text{מס' החופשיים}}$

בפרט אם אין שורת סתירה ואין חופשיים ← פתרון יחיד

בפרט אם אין סתירה, יש חופשיים ויש אינסוף מס' בשדה ← אינסוף פתרונות

תרגיל

מצא לאילו ערכים של הפרמטרים a יש למערכת פתרון יחיד, אין פתרון, או אינסוף פתרונות.
במקרה של אינסוף פתרונות מצא את הפתרון הכללי.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 & 2+a \\ a & 3a & 1 & 5 \end{array}\right)$$

נתחיל בלהגיע לצורה מדורגת. נחסר את R_1 מהאחרים

$$\xrightarrow[R_3 - aR_1 \to R_3]{R_2 - aR_1 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \\ 0 & 3a-a^2 & 1-a & 5-a \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 3a-a^2 & 1-a & 5-a \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 - R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 3a-a^2 & 0 & 3-a \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \cdot \frac{1}{1-a} \to R_3]{R_2 \cdot \frac{1}{3a-a^2} \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1-a} \end{array}\right)$$

תחת $a \neq 0,1,3$

כבר ראו בצורה המדורגת נוכל לראות שאם $a=1$ נקבל שורת סתירה ב R_3, אם $a=0$ R_2 תהיה סתירה.

כש $a=3$, נקבל ב R_2 שורת אפסים $\leftarrow$ אינסוף פתרונות (נמצא בהמשך).

נניח $a\neq 0,1,3$, נוכל להמשיך לחשב את הצורה הקנונית ולהגיע לפתרון יחיד.

כאשר $a=3$, יש אינסוף פתרונות, נמצא את הפתרון הכללי:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

נסמן את האיבר החופשי ב t

האיבר החופשי הוא האיבר ללא איבר ציר בעמודה שלו.

$$\begin{cases} 1x + 3t + 1z = 1 \\ -2z = 2 \longrightarrow z = -1 \end{cases}$$

$$x + 3t - 1 = 1 \longrightarrow x = 2 - 3t$$

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 2-3t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}}$$

תרגיל

מצא לאילו ערכים של הפרמטרים a,t יש למערכת פתרון יחיד, אין פתרון, או אינסוף פתרונות.
במקרה של אינסוף פתרונות מצא את הפתרון הכללי (הערה: זהו הכללה של התרגיל הקודם.
התרגיל הקודם מתקבל כאשר נציב t=-3 בתרגיל זה).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 & 2+a \\ a & 3a & 1 & 2-t \end{array}\right)$$

נאפס את האיברים הראשונים בשורות R_2, R_3:

$$\xrightarrow[R_2 - aR_1 \to R_2]{R_3 - R_2 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \\ 0 & 3a-a^2 & 0 & -t-a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & a(a-3) & 0 & a+t \\ 0 & 0 & 1-a & 2 \end{array}\right)$$

כעת נניח $a\neq 0,1,3$, אזי נטפל בהם פרטנית

$$\xrightarrow[\frac{1}{a-1}R_3 \to R_3]{\frac{1}{a(a-3)}R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a+t}{a(a-3)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1-a} \end{array}\right)$$

אין משתנים חופשיים ויש פתרון יחיד. נחזור לאחרים:

$a=0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ אם $t\neq 0 \Leftarrow$ סתירה אין פתרון.

$t=0 \Leftarrow$ משתנה חופשי, ∞ פתרונות

נסמן $y=s$: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ s \\ 2 \end{pmatrix} \middle| s\in\mathbb{R} \right\}$

נניח $a=1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1+t \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ שורה אחרונה סתירה, אין פתרון.

נניח $a=3$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3+t \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$ אם $t\neq -3$ יש שורת סתירה אין פתרון.

אם $t=3$, נסמן $y=s$

$\left\{ \begin{pmatrix} 2-3s \\ s \\ -1 \end{pmatrix} : s\in\mathbb{R} \right\}$ אינסוף פתרונות

תרגיל

4. נניח כי אחרי דירוג של מערכת נתונה הגענו ל $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

מצאו את קבוצת הפתרונות למערכת (מעל הממשיים) בהנחה ש:

- המערכת הומוגנית עם 4 משתנים .
- המערכת לא הומוגנית עם 3 משתנים.

4 משתנים הומוגנית:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} & & t & s & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$x + 2t - s = 0 \longrightarrow x = s - 2t$

$y + 3s = 0 \longrightarrow y = -3s$

$$\left\{ \begin{pmatrix} s-2t \\ -3s \\ t \\ s \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

3 משתנים:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} & & t & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

$x + 2t = -1$

$y = 3$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1-2t \\ 3 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

תרגיל

נכון/לא נכון:

- למערכת משוואות המיוצג ע"י מטריצה 2×4 אין פתרון.
- לכל מטריצה יש צורה מדורגת יחידה
- למטריצה $n \times m$ יש לכל היותר m איברים פותחים (בצורה מדורגת)
- למטריצה $n \times m$ יש לכל היותר n איברים פותחים (בצורה מדורגת)
- למערכת עם אינסוף פתרונות תהיה שורת אפסים בצורה מדורגת.
- בצורה מדורגת יש איבר יחיד שונה מאפס בכל עמודה.

א) תלוי: $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{array}\right)$ אין פתרון $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 7 \\ 2 & 14 \\ 3 & 21 \\ 4 & 28 \end{array}\right)$

ב) לא נכון צורה מדורגת קנונית קיימת יחידה.

ג) לא נכון

ד) נכון. כל איבר פותח חייב לבוא מימין לפותח הקודם לכן לכל היותר כמס' העמודות.

ה) לא נכון (ראו תרגיל קודם)

ו) לא נכון לפי הגדרת מטריצה מדורגת