מופשטת 1 קיץ 2013,תרגול 13

29 באוגוסט 2013

סדרות נורמליות וסדרות הרכב

הגדרה: סדרה נורמלית של חבורה G היא סידרה של ת"ח נומרליות:
$G = G_1 \triangleright G_2 \triangleright .... \triangleright G_k = \{e\}$

- שימו לב שכל ת"ח נומרלית בזו שלפניה ולאו דווקא נורמלית ב-G.

חבורות המנה $G_i/_{G_{i+1}}$ נקראות גורמים או מנות של הסדרה.

דוגמאות:

1. לכל חבורה יש סדרה נורמלית $G \triangleright \{e\}$ ואז המנה היחידה של הסדרה $G \cong G/_{\{e\}}$.
2. $S_3 \triangleright < (123) > \triangleright \{id\}$.

מנות: $S_3/_{<(123)>} \cong \mathbb{Z}_2$ וכן $< (123) > /_{\{e\}} = \mathbb{Z}_3$.

הגדרה: עידון של סדרה נורמלית

תהי $G = G_1 \triangleright G_2 \triangleright ... \triangleright G_k = \{e\}$ סדרה נורמלית. עידון שלה הוא סדרה מהצורה
$G = G_1 \triangleright G_2 \triangleright ... \triangleright G_i \triangleright G_i^* \triangleright G_{i+1} \triangleright ... \triangleright G_k = \{e\}$
כאשר הגורמים של האיברים שהוספנו הם לא טריוויאלים:
$G_i^*/_{G_{i+1}} \neq \{e\}, G_i/_{G_i^*} \neq \{e\}$

הגדרה: סדרת הרכב היא סדרה נורמלית שאין לה עידונים.

משפט: סדרה נורמלית היא סדרת הרכב אמ"מ כל הגורמים של הסדרה הם פשוטים (כלומר המנות הן חבורות פשוטות).

הערה: חבורה אבלית היא פשוטה אמ"מ היא ציקלית מסדר ראשוני. לכן, אם אחד הגורמים בסדרה הוא אבלי אך אינו ציקלי מסדר ראשוני אזי הסדרה אינה סדרת הרכב.

דוגמאות:

1. $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

נתבונן ב$G \triangleright \mathbb{Z}_2 \times \{0\} \triangleright \{0\} \times \{0\}$. זוהי סדרה נורמלית אך לא סדרת הרכב. הגורם הראשון: $|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4/_{\mathbb{Z}_2 \times \{0\}}| = 4$ אבלי מסדר שאינו ראשוני ולכן גורם זה אינו פשוט.

ננסה סדרה נוספת:

$G \triangleright \{0\} \times \mathbb{Z}_4 \triangleright \{0\} \times 2\mathbb{Z}_4 \triangleright \{0\} \times \{0\}$.

איזומורפיזם של גורמים:

$G/_{\{0\} \times Z_4} \cong \mathbb{Z}_2,$

$\{0\} \times \mathbb{Z}_4/_{\{0\} \times 2\mathbb{Z}_4} \cong \mathbb{Z}_2$.

הגורמים הם פשוטים ולכן זוהי סדרת הרכב.

2. $n \geq 5$: $S_n \triangleright A_n \triangleright \{id\}$.

$S_n/_{A_n} \cong \mathbb{Z}_2$ וכן $A_n/_{\{id\}} \cong A_n$ כאשר A_n זאת חבורה פשוטה. לכן כל הגורמים פשוטים ולכן זוהי סדרת הרכב.

3. למשל הסדרה $S_4 \triangleright A_4 \triangleright \{id\}$ לא סדרת הרכב כי הגורם $A_4/_{\{id\}} \cong A_4$ אינו פשוט.
נעדן את הסדרה:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_3 & & & & \\ & & | & & | & & & & \\ S_4 & \triangleright & A_4 & \triangleright & K & & \triangleright & \{id\} \\ & & & & \| \wr & & & \\ & & & & K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & & & \end{array}$$

$V_4 = K = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23), id\}$. הגורם האחרון אינו פשוט ולכן זוהי עדיין איננה סדרת הרכב.

נעדן שוב:

$$\begin{array}{ccccccccc} S_4 & \triangleright & A_4 & \triangleright & K & \triangleright & W & \triangleright & \{id\} \\ & | & & | & & | & & | & \\ & \mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_3 & & \mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_2 & \end{array}$$

כאשר $W = \{id, (12)(34)\}$ כל הגורמים הם פשוטים ולכן זוהי סדרת הרכב.

חבורות פתירות

הגדרה: חבורה היא פתירה אם יש לה סדרה נורמלית (לאו דווקא סדרת הרכב) כך שכל הגורמים הם אבלים.

דוגמאות:

1. כל חבורה אבלית היא פתירה. יש לה ס"נ $G \triangleright \{e\}$ והגורם היחיד הוא אבלי ($G \cong G/_{\{e\}}$).
2. כל החבורות הדיהרליות הן פתירות:

$$\begin{array}{ccccccc} D_n & \triangleright & \langle\sigma\rangle & & \triangleright & & \{id\} \\ & \downarrow & & & \downarrow & & \\ & \mathbb{Z}_2 & & & \langle\sigma\rangle/_{\{id\}} & \cong & \langle\sigma\rangle \end{array} .$$

לכן גורם זה הוא ציקלי ולכן אבלי.
3. חבורות שאינן פתירות: A_n, S_n עבור $n \geq 5$.
$S_n \triangleright A_n \triangleright \{id\}$. ($A_n$איננה אבלית).

תרגיל :

הראו שהחבורה הבאה היא פתירה: $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$.

פתרון:

תחילה נמצא את סדר החבורה $|A| = p^3$. זוהי חבורת p ולכן יש לה מרכז לא טריוויאלי: $|Z(A)| \neq 1$, $A/_{Z(A)}$ איננה ציקלית לא טריוויאלית ולכן $|Z(A)| = p$. נתבונן בסדרה

$$\begin{array}{ccccc} A & \triangleright & Z(A) & \triangleright & \{id\} \\ & | & & | & \\ & |A/_{Z(A)}| = p^2 & & |Z(A)/_{\{id\}}| = p & \end{array}$$

לכן החבורה פתירה כדרוש. מ.ש.ל

משפט: כל חבורת p היא פתירה.

טענה: תהא Gחבורה מסדר pq (עבור p,qראשוניים) אזי G פתירה.

הוכחה:ננסה למצוא תתי חבורות נורמליות. נבדוק תת חבורה $p-$סילו ו$q-$סילו.
$n_p \equiv 1 (\mod p) \wedge n_p \mid q : n_p \in \{1, q\}$. באופן דומה $n_q \in \{1, p\}$.

- אם $p=q$ אזי G אבלית כי היא מסדר p^2. אחרת $p\neq q$ ונניח ב.ה.כ כי

$$\Leftarrow n_q = 1 \Leftarrow q \not\equiv 1(\mod q) \Leftarrow p < q$$

יש לנו תת חבורה $q-$סילו נורמלית, נסמנה Q.

$$\begin{array}{ccccc} G & \rhd & Q & \rhd & \{e\} \\ & \| \wr & & & \\ & \mathbb{Z}_p & & & \end{array}$$ לכן הגורמים הם אבלים ולכן החבורה פתירה.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו שכל חבורה מסדר 1089 היא פתירה

<u>פתרון:</u> $n_{11} = 1 \Leftarrow n_{11} \in \{1,3,9\} \Leftarrow n_{11} \equiv 1(\mod 11) \wedge n_{11} \mid 3^2, 1089 = 3^2 \cdot 11^2$
ולכן תת חבורה 11־ סילו P_{11}היא נורמלית ולכן החבורה פתירה.

$$\begin{array}{ccccc} G & \rhd & P_{11} & \rhd & \{e\} \\ & | & & | & \\ & |G/_{P_{11}}| = 3^2 & & |P_{11}/_{\{e\}}| = 11^2 & \end{array}.$$

<u>הקומוטטור:</u>

<u>הגדרה:</u> תהי G חבורה ויהיו $a,b\in G$.

1. הקומוטטור של b,a מוגדר להיות $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$.
2. תת חבורת הקומוטטור מוגדרת כ־ $G\prime = \langle\{[a,b]\mid a,b\in G\}\rangle$.

<u>תרגיל:</u> מתי $[a,b]=e$?

<u>פתרון:</u> הדבר מתרחש אמ"ם a,b מתחלפים, כלומר $\Leftrightarrow$ $ba=ab$.

<u>משפט:</u> G אבלית $\Leftrightarrow G\prime=\{e\}$.

<u>תרגיל:</u> מהו $[a,b]^{-1}$?

<u>פתרון:</u> $[a,b]^{-1}=[b,a]$ ואכן $[a,b]\cdot[b,a]=aba^{-1}b^{-1}bab^{-1}a^{-1}=e$.

<u>הערה:</u> אם $H\le G$ אזי $H\prime \le G\prime$

<u>משפט:</u> $G\prime \lhd G$.

<u>מסקנה:</u> אם G חבורה פשוטה ואינה אבלית אזי $G\prime=G$. למשל $A_n'=A_n$עבור $n\ge 5$.

<u>הסבר:</u> מתקיים $G\prime \lhd G$ וכן G פשוטה ולכן $G\prime=\{e\}$ או $G\prime=G$. אבל G לא אבלית ולכן $\{e\}$ $G\prime=G \Leftarrow G\prime\neq\{e\}$.

<u>משפט:</u> $G/_{G\prime}$ הוא המנה האבלית המקסימלית של G, כלומר:

1. לכל חבורה G, המנה $G/_{G\prime}$ היא אבלית.
2. לכל N◁G, $G/_N$אבלית $\Leftrightarrow G\prime \le N$.

<u>דוגמה:</u>

1. $D_4=\langle\sigma,\tau\rangle$. ראינו כי $Z(D_4)=\{id,\sigma^2\}$ $D_4 \rhd$ וכמו כן $\mid D_4/_{Z(D_4)} \mid= 4$ ולכן $D_4' \le Z(D_4)$ לכן האפשרויות הן: $D_4'=\{id\},\{id,\sigma^2\}$. D_4 איננה אבלית ולכן $D_4^{'}=\{id,\sigma^2\}$.
2. $(S_n)\prime=A_n$ עבור $n\ge 5$. $S_n/_{A_n}\cong\mathbb{Z}_2$ אבלי $\Leftarrow (S_n)\prime \lhd S_n \Leftarrow (S_n)\prime \lhd A_n$ $\Leftarrow (S_n)\prime \le A_n$ לכן $(S_n)\prime=\{id\}$או $(S_n)\prime=A_n$.
מכיוון ש־ S_n איננה אבלית, $(S_n)\prime=\{id\}$ ולכן $(S_n)\prime\neq A_n$.

<u>הערה:</u> גם $A_4=(S_4)\prime$, וכן $(S_3)\prime=A_3$ (בדקו).

<u>הגדרה:</u> סדרת הקוממוטטורים/סדרת הנגזרת של החבורה G היא הסדרה
$\le G^{(n)} \le ... \le G^{(3)} \le G^{(2)} \le G^{(1)} \le G$ ... המוגדרת באינדקוציה ע"י
$G^{(0)}=G$, $G^{(1)}=G\prime$, $G^{(i+1)}=(G^{(i)})'$. (באופן כללי $G^{(n+1)}=[G^{(n)},G^{(n)}]$).

הערה: לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $G^{(k)} \triangleleft G^{(k-1)}$.
משפט: G היא חבורה פתירה $\Leftrightarrow$ קיים t סופי כך ש$G^{(t)} = \{e\}$.
לדוגמה: $G = D_3 \Leftarrow G\prime = \langle\sigma\rangle \Leftarrow G^2 = \{id\}$ ולכן D_3פתירה.
הערה: כך אפשר לראות ש־S_nאיננה פתירה עבור $n \geq 5$ שכן החל מ$i = 1$ מתקיים $(S_n)^{(i)} = A_n \neq \{id\}$.
תרגיל: תהא G חבורה מסדר 28. הוכיחו:
א. קיימת תת חבורה 7־ סילו נורמלית.
ב. אם G לא אבלית אזי $|G\prime| = 7$.
ג.אם G לא אבלית ויש לה ת"ח נורמלית מסדר 2 אזי $|\, G/_{Z(G)} \,| = 14$.
פתרון:
א.$|G| = 28 = 2^2 \cdot 7 \Leftarrow n_7 \mid 4 \wedge n \equiv 1 (\mod 7)$ ולכן $n_7 \in \{1,2,4\} \Leftarrow n_7 = 1$.
ולכן יש תת חבורה 7־סילו יחידה, נסמנה P_7 ולכן היא נורמלית (כי היא יחידה) כדרוש.

ב. $|\, G/P_7 \,| = 4$ ולכן $G\prime \leq P_7 \Leftarrow$ $G\prime = \begin{cases} \{e\} \\ P_7 \end{cases}$ אבל G לא אבלית ולכן $G\prime \neq \{e\}$
ולכן $G\prime = P_7$ ולכן $|G\prime| = 7$ כדרוש.
ג. $Z(G) \in \{1,2,4,7,14,28\}$
ונפסול אותם לאט־לאט:

- 28 לא יתכן כיוון וG לא אבלית
- 14 ו4 לא יתכנו כי אזי $G/Z(G)$ ציקלית

ונותרנו סה"כ עם $Z(G) \in \{1,2,7\}$. נבדוק: תהי $N \triangleleft G$ ת"ח נורמלית מסדר 2.
$N = \{e, a\}$ אבל לכל $b \in G$

$$bab^{-1} \in N \Rightarrow bab^{-1} = \begin{cases} e & (\rightarrow impossible) \\ a \end{cases} \Rightarrow bab^{-1} = a \Rightarrow ba = ab \Rightarrow a \in Z(G)$$

ולכן $Z(G)$ לא טריוויאלי. $Z(G)$ לא שווה ל־7 כי $a \in Z(G)$, $o(a) = 2$ וידוע $|Z(G)| \mid o(a) \Rightarrow |Z(G)| \mid 2 \Rightarrow Z(G) \neq 7$ ולכן 2 $|Z(G)| = 2$ ולכן $|\, G/Z(G) \,| =$ 14כדרוש. מ.ש.ל $\square$

בהצלחה לכולם במבחן. ⌣̈