בחינת סיום (מועד א') בקורס
מבנים אלגבריים להנדסה (83218)

מרצה: פרופ' נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים.
נא לענות על 3 מתוך 4 השאלות. בכל שאלה, סעיף א' שווה 24 נקודות וסעיף ב' שווה 10 נקודות.
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון ודף הנוסחאות המצורף בלבד.
בהצלחה!

שאלה 1

א. יהי p מספר ראשוני מהצורה $p = 4m + 3$ עבור $m \in N$. הוכיחו כי לא קיים פתרון למשוואה $x^2 = -1(mod\ p)$.

ב. תנו דוגמא לחבורה ציקלית סופית G בת 10 איברים לפחות, כך שבדיוק מחצית מהאיברים שלה הם יוצרים שלה.

שאלה 2

א. תהי $(G,*)$ חבורה ויהי $C(G) = \{x \in G: \forall y \in G, x * y = y * x\}$ המרכז של G. הוכיחו כי $C(G)$ הוא תת חבורה נורמלית של G. (יש להוכיח גם שהיא תת חבורה וגם שמתקיימת תכונת הנורמליות).

ב. האם קיים הומומורפיזם מהחבורה $(Z_{5780}, +)$ (כאשר פעולת החיבור היא מודולו 5780) לחבורה S_3? אם כן, בנו הומומורפיזם כזה והוכיחו שהוא אכן הומומורפיזם. אם לא, הוכיחו שהוא לא קיים.

שאלה 3

א. תנו דוגמא לחוג R כך שאוסף האיברים הלא-הפיכים ב- R וגם אוסף האיברים הנילפוטנטיים ב- R (כלומר, אוסף האיברים $x \in R$ כך שקיים $n > 0$ עבורו $x^n = 0$) אינם תתי חוג של R. בפרט, עליכם להוכיח שכל אחד מהאוספים האלה אכן איננו תת חוג.

ב. נתבונן בחוג $(Z_n, +, *)$ כאשר פעולות החיבור והכפל הן מודולו n. יהי $m \in Z_n$ איבר שאיננו הפיך, ויהי k זר ל- n (כלומר, $\gcd(k,n) = 1$). האם יתכן שקיים פתרון למשוואה $m * c = k\ (mod\ n)$?

שאלה 4

א. יהי F שדה סופי עם p^n איברים. הוכיחו שבחוג הפולינומים $F[x]$ מתקיים שוויון הפולינומים: $x^{p^n-1} - 1 = \prod_{\alpha \in F^*}(x - \alpha)$, כאשר $F^* = F \setminus \{0\}$.
הסיקו מכאן את משפט וילסון: לכל מספר ראשוני p מתקיים $(p-1)! = -1(mod\ p)$.

ב. תנו דוגמה לאיבר הפיך בחוג הפולינומים $F_4[x]$ שאיננו הפולינום איבר היחידה הכפלי של החוג. (כאן, F_4 הוא השדה עם ארבעה איברים.)