שיעורי בית 1

13 בנובמבר 2016

1. הצג את התמורות הבאות באמצעות מחזורים זרים.

(א) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(ב) $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

2. חשבו: $a^2 \ , b^2, bab^{-1}, ab$

3. תהא $\sigma \in S_n$. ותהא $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ ההצגה שלה כמכפלה של מחזורים זרים. הוכח כי

(א) $\sigma^{-1} = \tau_1^{-1} \cdots \tau_m^{-1}$

(ב) $\sigma^k = \tau_1^k \cdots \tau_m^k$ לכל k טבעי.

(ג) הראה שהשיוויניות לעיל לא מתקיימים בהכרח בחבורה כללית. כלומר: תהא G חבורה. ויהא $g = x_1 \cdots x_m \in G$ מצא דוגמא המקיימות

i. $g^{-1} \neq x_1^{-1} \cdots x_m^{-1}$

ii. $g^k \neq x_1^k \cdots x_m^k$

(ד) מצא את התנאים ששיוויונות אלו כן יתקיימו, כלומר שכן מתקיים

i. $g^{-1} = x_1^{-1} \cdots x_m^{-1}$

ii. $g^k = x_1^k \cdots x_m^k$

4.

(א) הוכיחו כי עבור מחזור $(i_1,\ldots,i_m)\in S_n$ מתקיים כי

$$(i_1,\ldots,i_m)=(i_1,i_2)\,(i_2i_3)\ldots(i_{m-1}i_m)$$

(ב) הסיקו כי כל תמורה $\sigma\in S_n$ ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים. (הצגה זאת אינה יחידה. למשל $(3,4)\,(1,2)\,(3,4)=(1,2)$)

5. הגדרה: תהא $\sigma\in S_n$ נגדיר $t=\#\left\{(i,j):\ i<j,\sigma(j)<\sigma(i)\right\}$ להיות מספר היפוכי הסדר [אינדקסים (i,j) המקיימים כי $i<j$ וגם $\sigma(j)<\sigma(i)$ נקראים היפוך סדר. שימו לב כי בשאלה זו (i,j)זהו זוג סדור של האינדקסים i,j ולא תמורה]. עוד נגדיר את הסימן של σ להיות

$$sgn(\sigma)=(-1)^t$$

כלומר הסימן של σ הוא -1 בחזקת מספר היפוכי הסדר, כלומר אם מספר היפוכי הסדר הוא זוגי הסימן שווה 1 ואם מספר היפוכי הסדר הוא אי זוגי אזי הסימן שווה ל -1. למשל עבור $\sigma=(1,2,3)$ מתקיים כי הזוג הסדור$(1,3)$ הוא היפוך סדר כי $1<3$ וגם $\sigma(3)<\sigma(1)$. גם הזוג הסדור$(2,3)$ הוא היפוך סדר. שני אלו היפוכי הסדר היחידים ולכן $sgn(\sigma)=(-1)^2=1$. התמורות שהסימן שלהם שווה 1 נקראות תמורות זוגיות ואילו תמורות שהסימן שלהם שווה -1 נקראות תמורות אי זוגיות.
תהא $\sigma\in S_n$ תמורה ויהא $\sigma=\tau_1\cdots\tau_m$ הצגה שלה כמכפלה של חילופים. הוכיחו כי מתקיים

$$sgn(\sigma)=(-1)^m$$

[למשל את $\sigma=(1,2,3)$ ניתן להציג כ $(2,3)\,(1,2)$כלומר כמפלה של 2 חילופים ואכן $sgn(\sigma)=(-1)^2$]
הדרכה: הוכיחו כי $sgn(\sigma_1\sigma_2)=sgn(\sigma_1)sgn(\sigma_2)$
ע"י האבחנה כי $\#\left\{(\sigma_2(i),\sigma_2(j)):\ \sigma_2(i)<\sigma_2(j),\sigma_1(\sigma_2(j))<\sigma_1(\sigma_2(i))\right\}=\#\left\{(i,j):\ i<j,\sigma_1(j)<\sigma_1(i)\right\}$

6. עבור $\sigma\in S_n$ ומחזור $(i_1,i_2,\ldots i_m)\in S_n$ הוכח כי מתקיים השיוויון הבא

$$\sigma\,(i_1,i_2,\ldots i_m)\,\sigma^{-1}=(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\ldots,\sigma(i_m))$$

למשל $\sigma=(1,2)$ מתקיים כי

$$\sigma\,(2,3,5,6)\,\sigma^{-1}=(1,3,5,6)$$

7. תרגיל מודרך: טענה־ קיימות $\sigma_1,\sigma_2\in S_n$ כך שכל $\sigma\in S_n$ ניתן להציג כמכפלה שלהם והופכיהם.
כלומר $\sigma=\prod_{i=1}^{N}\tau_i$ כאשר לכל i מתקיים $\tau_i\in\left\{\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2,\sigma_2^{-1}\right\}$.
אנחנו נעבוד עם $\sigma_1=(1,2,3,\ldots,n)\,,\sigma_2=(1,2)$.

(א) הראה כי כל חילוף מהצורה $(1,i)$ ניתן להציגו ע"י ע"י σ_1,σ_2 והופכיהן. (רמז: תרגיל 6 יכול להיות לעזר

(ב) הראה שכל חילוף (i,j) ניתן להביעו בעזרת $\{(1,k)\}_{k>2}$

(ג) הוכח את הטענה.