

תרגיל 2

10 באפריל 2018

1. בחרו ארבעה מהסעיפים הבאים (לבוחרים יותר מארבעה ייבדקו הארבעה הראשונים) ובדקו האם הפונקציות הן חח"ע? על? נמקו.
- א. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ המוגדרת ע"י $f(n) = |n|$.
- ב. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^3$.
- ג. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $f(n, m) = 2^n \cdot 3^m$.
- ד. תהי A קבוצה ו- $f : P(A) \rightarrow P(A)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(B) = A \setminus B$.
- ה. תהי A קבוצה לא ריקה, $B \subset A$ (מוכל ממש) תת קבוצה, ו- $f : P(A) \rightarrow P(B)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(C) = C \cap B$.
- ו. תהי A קבוצה לא ריקה, $B \subset A$ (מוכל ממש) תת קבוצה, ו- $f : P(B) \rightarrow P(A)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(C) = C \cup (A \setminus B)$.
- ז. $f : P(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י: $f(\phi) = 1$, ולכל $A \neq \phi$ מגדירים $f(A) = \min(A)$, כלומר A נשלחת לאיבר הקטן ביותר שבה (לפי יחס הסדר הרגיל).

2. תהיינה A, B, C, D קבוצות לא ריקות עם פונקציות $f : A \rightarrow C, g : B \rightarrow D$. נגדיר פונקציה $f \times g : A \times B \rightarrow C \times D$ ע"י:

$$f \times g(a, b) = (f(a), g(b))$$

הוכיחו:

- א. f, g חח"ע $\iff f \times g$ חח"ע.
- ב. f, g על $\iff f \times g$ על.

3. תהיינה A, B קבוצות עם החלוקות $\{A_i\}_{i \in I}, \{B_i\}_{i \in I}$. בנוסף, לכל $i \in I$ נתונה פונקציה חח"ע ועל:

$$f_i : A_i \rightarrow B_i$$

הוכיחו שקיימת פונקציה חח"ע ועל

$$f : A \rightarrow B$$

4. תהי פונקציה $f : X \rightarrow Y$ ו- $B \subseteq Y$.
 א. הוכיחו כי: $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$.
 ב. מצאו דוגמא לפונקציה כנ"ל כך שההכלה היא הכלה ממש.
 ג. הוכיחו שאם $f[f^{-1}[B]] = B$ אז

5. תהי $f : X \rightarrow Y$ פונקציה ותהיינה תתי קבוצות $A_1, A_2 \subseteq X, B_1, B_2 \subseteq Y$.
 בחרו שלושה מהסעיפים הבאים (לבוחרים יותר משלושה ייבדקו השלושה הראשונים)
 והוכיחו או הפריכו את הטענות:

- א. $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$.
 ב. $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$.
 ג. $f^{-1}[B_1^c] = (f^{-1}[B_1])^c$.
 ד. $f[A_1^c] = (f[A_1])^c$.
 ה. $f[A_1 \Delta A_2] = f[A_1] \Delta f[A_2]$.
 ו. $f^{-1}[B_1 \Delta B_2] = f^{-1}[B_1] \Delta f^{-1}[B_2]$.

6. תהיינה A, B קבוצות, תהא $f : A \rightarrow B$ פונקציה, ונגדיר פונקציה נוספת $g : P(B) \rightarrow P(A)$ ע"י:

$$g(X) = f^{-1}[X]$$

הוכיחו: g חח"ע $\iff f$ על.