פתרון תרגיל 4

1. מצאו את עוצמת תתי הקבוצות הבאות של $P(\mathbb{N})$:

א. $G = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = \aleph_0 \wedge |X^c| < \aleph_0\}$.

ב. $J = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = \aleph_0 \wedge |X^c| = \aleph_0\}$.

ג. $L = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = \aleph_0 \wedge \forall x, y \in X : 18|(x-y)\}$. הדרכה: מצאו תת קבוצה אינסופית של הטבעיים כך שאוסף תתי הקבוצות האינסופיות שלה מוכלת ב־L. אתם יכולים להשתמש במה שראינו בתרגול עבור הטבעיים, להלן הכללה קטנה שלו: אם $|A| = \aleph_0$ אז עוצמת אוסף תתי הקבוצות האינסופיות של A מעוצמה $\aleph_1$ (כלומר, $|\{B \subseteq A : |B| = \aleph_0\}| = \aleph_1$). זה ייתן לכם צד אחד בקש"ב.

<u>פתרון:</u>

א. ראינו (מותר להשתמש בכל אופן) שאוסף תתי הקבוצות הסופיות של הטבעיים $F = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| < \aleph_0\}$ מקיים $|F| = \aleph_0$. נגדיר פונקציה $f : G \to F$ ע"י: לכל $X \in G$

$$f(X) = X^c$$

קל לראות שזו פונקציה חח"ע (אם המשלימים שווים אז גם הקבוצות עצמן) ועל, כי המקור הוא המשלים. מש"ל.

ב. עוד ראינו ש $I = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = \aleph_0\}$ (אוסף תתי הקבוצות של $\mathbb{N}$ האינסופיות) היא מעוצמה $\aleph_1$. כעת נשתמש בידוע לנו על $G = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = \aleph_0 \wedge |X^c| < \aleph_0\}$ מהסעיף הקודם. נקבל $I = G \cup J$ והאיחוד הוא זר. מסעיף א קיבלנו ש־$|G| = \aleph_0$, ונקבל (בדומה לתרגיל שעשינו בכיתה ובדומה למה שעשיתם בהרצאה על $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$) ש־א $|J| = \aleph$.

ג. נשים לב ש־ $L \subseteq P(\mathbb{N})$, לכן אם נראה ש־$\aleph \geq |L|$ נקבל, לפי ק.ש.ב. $|L| = \aleph$.

ואכן, ניקח תת קבוצה $M \subseteq L$ המוגדרת לפי

$$M = \{X \subseteq 18\mathbb{N} : |X| = \aleph_0\}$$

ולכן, כמו שאוסף תתי הקבוצות האינסופיות של הטבעיים מעוצמה $\aleph$, כך גם אוסף תתי הקבוצות האינסופיות של $18\mathbb{N}$ (אוסף המספרים המתחלקים ב־18) מעוצמה $\aleph$ וסיימנו.

2. א. מה מספר האפשרויות להושיב 16 אנשים כך ש־ 6 יושבים סביב שולחן עגול אחד והיתר סביב שולחן עגול אחר?

ב. מה מספר האפשרויות להושיב 16 אנשים כך ש־ 6 יושבים סביב שולחן עגול אחד והיתר על ספסל?

ג. בכיתה יש 30 תלמידים. רוצים לחלק להם כובעים לכבוד מסיבת פורים: 7 כובעי ליצן, 18 מצנפות שינה ו־5 סומבררוס, כך שכל תלמיד יקבל בדיוק כובע אחד. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

ד. מחלקת אבטחת מידע דרשה שסיסמאות המחשב תהיינה מורכבות מ־6 ספרות (מתוך 10 אפשריות) ו־12 אותיות (מתוך 52 אותיות האנגלית, גדולות וקטנות). כמה סיסמאות ניתן להרכיב?

<u>פתרון:</u>

א. מספר הדרכים לסדר n אנשים במעגל הוא $(n-1)!$. תחילה נבחר 6 אנשים מתוך 16 אנשים לשבת בשולחן הראשון, ויש $\binom{16}{6}$ בחירות שכאלו. אז נסדר 6 אנשים במעגל, ואת $10 = 16 - 6$ האנשים הנותרים גם נסדר במעגל. כלומר יש $\binom{16}{6}5!9!$ אפשרויות להושבת האנשים.

הערה: שימו לב שניתן לבחור תחילה את 10 האנשים שישבו בשולחן השני, והתוצאה זהה כי $\binom{16}{10} = \binom{16}{6}$.

ב.מספר הדרכים לסדר n אנשים בשורה הוא $n!$. תחילה נבחר 6 אנשים מתוך 16 אנשים לשבת בשולחן הראשון, ויש $\binom{16}{6}$ בחירות שכאלו. אז נסדר 6 אנשים במעגל,

ואת $16-6=10$ האנשים הנותרים גם נסדר בשורה. כלומר יש $\binom{16}{6}5!10!$ אפשרויות להושבת האנשים.

ג. תחילה נבחר 7 סטונדטים מתוך 30 וניתן להם כובעי ליצן, ויש $\binom{30}{7}$ אפשרויות כאלו. אחר כך, מתוך $30-7=23$ הסטודנטים הנותרים נבחר 18 תלמידים שיחבשו מצנפות שינה, ויש $\binom{23}{18}$ אפשרויות כאלו. שאר הסטודנטים מוכרחים לקבל סומבררוס, הרי $\binom{5}{5}=1$. בסך הכל יש $\binom{30}{7}\binom{23}{18}\binom{5}{5}=\frac{30!}{7!\cdot 18!\cdot 5!}$ דרכים לבחירה.

שימו לב שהתשובה $\frac{30!}{7!18!5!}$ לא תלויה בסדר של בחירת קבוצות הכובעים. תרגיל זה הוא דוגמה למקדם המולטינומי. הסימון של מקדם זה הוא $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ כאשר $n=k_1+k_2+\cdots+k_m$, והוא סופר את מספר הדרכים לחלק n עצמים שונים (אצלנו 30 הסטודנטים) ל־m קבוצות (אצלנו שלושת סוגי הכובעים), כך שבקבוצה הראשונה יש k_1 עצמים, בקבוצה השנייה יש k_2 עצמים וכן הלאה.

ד. ראשית נבחר את מיקום הספרות בסיסמא, זה נעשה ב $\binom{18}{6}$ דרכים. כעת נקבעו אוטומטית גם מיקומי הספרות. לספרות: יש חשיבות לסדר ומותר חזרות ולכן זה 10^6, ובדומה לאותיות עם חזרות וסדר נקבל 52^{12}. סה"כ:

$$\binom{18}{6}\cdot 10^6\cdot 52^{12}$$

3. תהי A קבוצה מגודל n, ויהי R יחס סדר מלא עליה. חשבו את $|R|$.

<u>פתרון:</u>

ראשית היחס רפלקסיבי, ולכן לכל $a\in A$ נקבל aRa, וזה נותן לנו n איברים. בנוסף, לכל $a\neq b\in A$, בדיוק אחד מהזוגות $(a,b),(b,a)$ נמצא, ולכן צריך להוסיף את כל הזוגות האפשריים ללא חשיבות לסדר וללא חזרה, ויש $\binom{n}{2}$ כאלה. סה"כ:

$$\binom{n}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

4. א. בכמה דרכים ניתן לבחור שני מספרים שונים בין 1 לבין 100 שסכומם זוגי?

ב. בכמה דרכים ניתן לבחור שלושה מספרים שונים בין 1 לבין 100 שסכומם זוגי?

<u>פתרון:</u>

א. צריך ששניהם יהיו זוגיים או ששניהם יהיו אי־זוגיים. לכל אפשרות יש לנו $\binom{50}{2}$ דרכים, ולכן סה"כ

$$2 \cdot \binom{50}{2}$$

ב. כאן או ששלושתם זוגיים ($\binom{50}{3}$ דרכים), או ששניים אי־זוגיים ואחד זוגי ($50 \cdot \binom{50}{2}$ דרכים). סה"כ:

$$\binom{50}{3} + 50 \cdot \binom{50}{2}$$

0>0