תרגיל 3 - פתרון

שאלה 1

1) א) אם ננסה לחשב גבול זה בעזרת משפט לופיטל (בידקו שתנאי המשפט אכן מתקיימים!), נקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} \qquad (*)$$

וגבול זה אינו קיים! אי קיומו נובע מכך שהגבול $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ אינו קיים. נניח בשלילה

נניח שהגבול $\lim_{x\to 0}\cos^2 x\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$ קיים.

אם כך, הרי שהוא סופי (שכן ניתן להראות שהפונקציה חסומה בסביבה נקובה של $x=0$, ולכן הגבול - במידה שהוא קיים - הוא סופי).

נסמן גבול זה ב- l.

מכאן נקבל כי:

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\cos^2 x\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)}_{\to l}=l$$

לפי אריתמטיקה של גבולות קיימים וסופיים.

וקיבלנו כי $\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)=l$, ולכן:

$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{2x\sin\frac{1}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)}_{\to l}\right)=-l$$

0 (כמכפלה של פונ' חסומה בפונ' השואפת ל-0)

לפי אריתמטיקה של גבולות.

קיבלנו כי $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=-l$ בסתירה לכך ש- $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ לא קיים.
(ההוכחה דומה להוכחת אי קיומו של $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$).

ולכן, הגבול שקיבלנו באגף ימין ב-(*) לא קיים ולכן לא ניתן להשתמש בתוצאות משפט לופיטל, כי התוצאה מתקיימת רק אם $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים.

(אפשר לפתור זה באופן ישיר:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}\cdot\sin\tfrac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{x\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x}_{0\cdot 1\cdot 1=0}\cdot\underbrace{\sin\tfrac{1}{x}}_{\text{פו חסומה}}=0$$

ב)

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\tfrac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cot x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=$$

$$\underset{\substack{\text{לופיטל}\\ \text{(ואז קיים הגבול)}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x}+\cos x}\underset{\substack{\text{אריתמטיקה}\\ \text{של גבולות}}}{=}\frac{0}{1+1}=0$$

ג)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{1/2}-(\cos x)^{1/3}}{\sin^2 x}=$$

$$\underset{\substack{\text{לופיטל}\\ \text{(ואז קיים הגבול!)}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2}\sin x+\frac{1}{3}(\cos x)^{-2/3}\sin x}{2\sin x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2}+\frac{1}{3}(\cos x)^{-2/3}}{2\cos x}\underset{\substack{\text{אריתמטיקה}\\ \text{של גבולות}}}{=}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2}=-\frac{1}{12}$$

2) א) הטענה <u>אינה</u> נכונה. דוגמא נגדית מתאימה היא הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

עבורה מתקיים:

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$x=0$ אינה נק' מקסימום או מינימום מקומי של f. נוכיח זאת:

<u>בכל</u> סביבה של $x=0$ יש x-ים עבורם $\sin\frac{1}{x}>0$ ו-x-ים עבורם $\sin\frac{1}{x}<0$,

וכן, <u>בכל</u> סביבה של $x=0$ יש x-ים עבורם $f(x)>0$ ו-x-ים עבורם $f(x)<0$,

והרי $f(0)=0$, ולכן $x=0$ <u>אינה</u> נק' קיצון של f.

$x=0$ גם אינה נק' פיתול של f, שכן הישר: $l(x)=0$, הינו

המשך ל-f ב- $x=0$, והטענה - אין סביבה של $x=0$ אשר בתוכה
מתקיים $f(x)>0$.

ב) הטענה אינה נכונה: f עולה, ולכן חד חד ערכית ולכן $f((a,b))$,
ולכן f^{-1} קיימת. אולם f^{-1} לאו דווקא גזירה. לדוגמא,
$f(x)=x^3$ ב- $(-1,1)$. אזי $f(-1,1)=(-1,1)$ אולם
$f^{-1}(x)=x^{1/3}$ אינה גזירה ב-0.

ג) הטענה אינה נכונה: לדוגמא, הפונקציה $f(x)=x^4+x$
גזירה ב- $\mathbb{R}$ ובפרט בקטע $(-1,1)$.
$f'(0)=1$, $f''(0)=0$. אולם $f''(x)=12x^2$ ולכן
$f''(x)>0$ לכל $x\neq0$ ולכן $x=0$ אינה נק' פיתול.

שאלה 2

סעיף 1

א.

$$f(x) = x - 2\arctan x$$

תחום הגדרה:הפונקציה מוגדרת על כל $\mathbb{R}$.
קל לראות שהפונקציה אי זוגית. כי

$$f(-x) = -x - 2\arctan(-x) = -x + 2\arctan x = -f(x)$$

לכן נסתכל רק על האיזור שבו $x > 0$
נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = 0$$

נקבל ש $x = \pm 1$ כך שאם $|x| > 1$ נקבל ש $f'(x) > 0$ ולכן הפונקציה עולה.
עבור $|x| < 1$ נקבל שהפונקציה יורדת.
לכן $(1, 1 - \frac{\pi}{2})$ היא נקודת מינימום (וכמובן $(-1, -1 + \frac{\pi}{2})$ היא נקודת מקסימום).
תחומי קעירות/קמירות:

$$f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

ברור שאם $x > 0$ יש לנו קעירות ואם $x < 0$ יש לנו קמירות.
לכן $x = 0$ היא נקודת פיתול.
אסימפטוטות:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}(1 - \frac{2\arctan x}{x}) = 1$$

בדומה

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

אבל

$$\lim_{x\to\infty}(x - 2\arctan x - x) = -\pi$$

ו

$$\lim_{x\to-\infty}(x - 2\arctan x - x) = \pi$$

ולכן $y = x - \pi$ היא אסימטוטה ב ∞ ו $y = x + \pi$ היא אסימפטוטה ב $-\infty$.
נקודות חיתוך:
ברור ש $(0,0)$ היא נקודת חיתוך. לפי החקירה רואים שיש עוד שתי נקודות חיתוך עם ציר x למרות שקצת קשה לחשב את הערכים שלהם.

ב.

$$f(x) = x^x$$

כאשר $x > 0$.
תחום הגדרה: מוגדרת בכל התחום $x > 0$.
זוגיות אי זוגיות: לא רלוונטי.
נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה:
נזכור כי

$$(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$$

אם נשווה

$$x^x(\ln x + 1) = 0$$

נקבל

$$\ln x = -1$$

כלומר

$$x = e^{-1}$$

בתחום שבו $x > e^{-1}$ נקבל שהפונקציה עולה ובתחום $x < e^{-1}$ נקבל שהפונקציה יורדת. לכן $(e^{-1}, (e^{-e^{-1}}))$ היא נקודת מינימום.
נבדוק תחומי קעירות/קמירות: הנגזרת השניה היא:

$$x^x(\ln x + 1)^2 + x^x\frac{1}{x} > 0$$

ולכן הפונקציה תמיד קעורה.
חיתוך עם הצירים: נשים לב ש

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x} = 1$$

ולכן הפונקציה מתקרבת ל $(0, 1)$.
אין עוד חיתוכים.
אסימפטוטות:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^x}{x} = \infty$$

ולכן אין אסימפטוטות.

ג.

$$f(x) = x + \sin 2x$$

הפונקיצה מוגדרת בכל התחום.
קל לראות שהפונקציה אי זוגית.

נמצא תחומי עליה וירידה ונקודות קיצון:

$$f'(x) = 1 + 2\cos 2x = 0$$

נקבל

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

כלומר

$$2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

כלומר:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$$

אם נסתכל רק על התחום $0 < x < 2\pi$ (כי הפונקציה אי זוגית) נקבל את הנקודות

$$x \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$$

אם נבדוק תחומי עליה וירידה נקבל:
בתחום: $0 < x < \frac{\pi}{3}$ $f'(x) > 0$ ולכן הפונקציה עולה.
בתחום: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ $f'(x) < 0$ ולכן הפונקציה יורדת.
בתחום: $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$ $f'(x) > 0$ ולכן הפונקציה עולה.
בתחום: $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$ $f'(x) < 0$ ולכן הפונקציה יורדת.
בתחום: $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$ $f'(x) > 0$ ולכן הפונקציה עולה.
ולכן נקודות הקיצון הן:
מקסימום:

$$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}), \quad (\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})$$

מינימום:

$$(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}), \quad (\frac{5\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

נבדוק פיתול ותחומי קמירות/קעירות:

$$f''(x) = -4\sin 2x$$

אם נזכור שאנחנו מסתכלים רק על האיזור $0 < x < 2\pi$
אז קל לראות את תחומי הקעירות והקמירות:
בתחום: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ הפונקציה קעורה.
בתחום: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ הפונקציה קמורה.
בתחום: $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ הפונקציה קעורה.
בתחום: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ הפונקציה קמורה.
מכאן קל לראות את נקודות הפיתול.

$$(0,0), \quad (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad (\pi, \pi), \quad (\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$$

(את הנקודה $(2\pi, 2\pi)$ לא נחשיב כנקודת פיתול כי היא בקצה התחום).
אסימפטוטות: אין.
נקודות חיתוך עם הצירים: קל לראות ש $x + \sin 2x = 0$ מתקיים כש $x = 0$.
אם נסתכל על נקודות המינימום שלנו (בתחום $x > 0$) נראה שכולן מעל ציר x ובשילוב עם הסתכלות על תחומי העליה וירידהת רואים שאין נקודות חיתוך נוספות.

ד.

למעשה הפונקציה היא:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x} & |x| \le 1 \\ \frac{x^2-1}{x} & |x| \ge 1 \end{cases}$$

תחום ההגדרה: $x \neq 0$.
קל לראות שהפונקציה אי זוגית. אז נסתכל רק על התחום $x \ge 0$.
נתחיל לחקור בתחום $0 \le x \le 1$, כלומר את הפונקציה

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x} = \frac{1}{x} - x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 < 0$$

הפונקציה תמיד יורדת.
נסתכל על הנגזרת השנייה

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$$

כלומר הפונקציה תמיד קמורה.
עכשיו נסתכל על הפונקציה בתחום $x \ge 1$ כלומר על הפונקציה

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x}$$

הנגזרת היא

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$$

כלומר הפונקציה תמיד עולה בתחום זה.
נסתכל על הנגזרת השניה

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$$

כלומר הפונקציה תמיד קעורה.
כמובן שמתוך כל זה נסיק ש $(1,0)$ היא נקודת מינימום והיא גם נקודת פיתול. נשים לב שהפונקציה בכלל לא גזירה ב $x = 1$.
נסתכל על אסימפטוטות אנכיות:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - x = \infty$$

ולכן $x = 0$ היא אסימפטוטה אנכית. היא האסימפטוטה האנכית היחידה.

אסימפטוטות משופעות: כאן כמובן נסתכל על החלק של $x \geq 1$ כלומר

$$x - \frac{1}{x}$$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} x - \frac{1}{x} - x = 0$$

כלומר $y = x$ היא אסימפטוטה משופעת.

ה.

למעשה הפונקציה היא:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{1-x} & x > 1 \\ xe^{x-1} & 0 \leq x \leq 1 \\ -xe^{x-1} & x < 0 \end{cases}$$

אז צריך לעשות שלוש חקירות שונות בתחומים שונים.
כמו כן ברור שהפונקציה לא זוגית או אי זוגית.
בתחום $x > 1$ נקבל שהנגזרת היא:

$$f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x}$$

נקבל שבתחום שלנו $f'(x) < 0$ ולכן הפונקציה תמיד יורדת.
הנגזרת השניה היא:

$$f''(x) = -2e^{1-x} + xe^{1-x}$$

זה מתאפס ב $x = 2$. כש $x < 2$ הפונקציה שלילית (כלומר יש קמירות) וכאשר $x > 2$ הפונקציה חיובית כלומר יש קעירות.
נבדוק אם יש אסימטפוטה

$$\lim_{x\to\infty} xe^{1-x} = 0$$

ולכן $y = 0$ אסימטפוטה.
בתחום $0 < x < 1$ נקבל שהנגזרת היא:

$$f'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1}$$

שזה גדול מ 0 לכל x.ולכן הפונקציה עולה בכל התחום הזה.
כמו כן,

$$f''(x) = 2e^{x-1} + xe^{x-1} > 0$$

ולכן הפונקציה קעורה בכל התחום.
בתחום $x < 0$ נקבל ש

$$f'(x) = -e^{x-1} - xe^{x-1}$$

שזה מתאפס כש $x = -1$. כאשר $x > -1$ זה ערך שלילי (כלומר הפונקציה יורדת) וכאשר $x < -1$ זה ערך חיובי (כלומר הפונקציה עולה)

נגזור פעמיים ונקבל:

$$f''(x) = -2e^{x-1} - xe^{x-1}$$

זה מתאפס כש $x = -2$. אם $x > -2$ נקבל ערך שלילי (קמור) ואם $x < -2$ הערך חיובי (קעור).
נמצא אסימפטוטה:

$$\lim_{x \to -\infty} -xe^{x-1} = 0$$

אז שוב $y = 0$ אסימפטוטה.
קל לראות ש $(0,0)$ היא נקודת החיתוך היחידה עם הצירים.
לסיכום:

1. תחום הגדרה: כל $\mathbb{R}$.
2. זוגיות/אי זוגיות: אין.
3. חיתוך עם הצירים: $(0,0)$.
4. תחומי עליה וירידה:
   (א) עליה: $x < -1, \quad 0 < x < 1$
   (ב) ירידה: $-1 < x < 0, \quad 1 < x$
5. נקודות קיצון (מקומיות):
   (א) מקסימום: $(-1, e^{-2}), \quad (1,1)$
   (ב) מינימום: $(0,0)$
6. תחומי קעירות/קמירות:
   (א) קעור: $x < -2, \quad 0 < x < 1, \quad 2 < x$
   (ב) קמור: $-2 < x < 1, \quad 1 < x < 2$
7. נקדודות פיתול: $(2e^{-1}), \quad (-2, 2e^{-3})$ (נשים לב ש $(0,0)$ ו $(1,1)$ לא נחשבות נקודות פיתול למרות שבאמת הפונקציה משנה סוג קעירות וזה בגלל שהפונקציה לא גזירה בנקודות אלו. (קל לבדוק זאת).)
8. אסימפטוטות: $y = 0$ ב $\pm\infty$.

סעיף 2

א.

נניח שהאורך הוא x והרוחב הוא y. ידוע ש $2x + 2y = a$ ורוצים ש xy יהיה מקסימלי. כלומר רוצים למצוא מקסימום גלובאלי של הפונקציה

$$f(x) = xy = x(\frac{a}{2} - x) = \frac{a}{2}x - x^2$$

כאשר הפונקציה מוגדרת על התחום $[0, \frac{a}{2}]$. לפי וירשטראס קיים מקסימום גלובאלי והוא לא יכול להיות בקצוות כי $f(0) = f(\frac{a}{2}) = 0$ וזה הערך הכי נמוך של הפונקציה.
אז המקסימום הגלובאלי מתקבל במקום שבו הנגזרת מתאפסת

$$f'(x) = \frac{a}{2} - 2x$$

כלומר נקבל $x = \frac{a}{4}$ כלומר $y = \frac{a}{4}$ כלומר זה ריבוע.

ב.

שוב נניח שהאורך הוא x והרוחב הוא y ואז ידוע ש $xy = a$ ורוצים ש $2x + 2y$ יהיה מינימאלי. כלומר רוצים למצוא מינימום גלובאלי ל

$$f(x) = 2x + 2y = 2x + 2\frac{a}{x}$$

כאשר תחום ההגדרה הוא $(0, \infty)$. נשים לב ש

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

ולכן מינימום גלובאלי קיים. והוא חייב להיות במקום בו הנגזרת מתאפסת

$$f'(x) = 2 - \frac{2a}{x^2}$$

כלומר צריך $x = \sqrt{a}$ כלומר $y = \sqrt{a}$ כלומר ריבוע.

סעיף 3

אם נסמן ב $(0, t)$ את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה y.
אז קל לחשב שמשוואת הישר צריכה להיות

$$y = \frac{4-t}{3}x + t$$

ולכן נקודת החיתוך עם ציר ה x היא:

$$x = \frac{3t}{t-4}$$

נקבל ששטח המשולש הוא:

$$f(t) = \frac{3}{2}\frac{t^2}{t-4}$$

כאשר הפונקציה מוגדרת על $(4, \infty)$ (נשים לב ש $t > 4$ אחרת אין משולש). אנחנו צריכים למצוא מינימום גלובאלי.
היות ש $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$ ו $\lim_{t\to 4^+} f(t) = \infty$ ו $f(t)$ רציפה אז ל $f(t)$ יש מינימום גלובאלי (הוכחנו טענות כאלה באינפי 1). אין נקודות קצה ואין נקודות שבהן f לא גזירה אז המינימום הגלובאלי מתקבל בנקודה עם נגזרת 0.
אם נוותר על הקבוע $\frac{3}{2}$ ונגזור נקבל:

$$f'(t) = \frac{2t(t-4) - t^2}{(t-4)^2} = \frac{2t^2 - 8t - t^2}{(t-4)} = \frac{t(t-8)}{(t-4)^2}$$

נקבל שהנגזרת מתאפסת רק ב $t = 8$ ($t = 0$ זה מחוץ לתחום מבחינתנו). ובאמת אם $t > 8$ הנגזרת חיובית, ואם $t < 8$ הנגזרת שלילית ולכן זאת נקודת מינימום.
בנוסף זאת הנקודה היחידה בתחום ההגדרה שהנגזרת מתאפסת ולכן זאת חייבת להיות נקודת מינימום גלובאלית, אז היא הנקודה שאנחנו מחפשים.
משוואת הישר היא:

$$y = -\frac{4}{3}x + 8$$

סעיף 4

ראשית נשים לב שהפונקציה

$$f(x) = 2x - \arccos\frac{1}{x}$$

מוגדרת רק בתחום $|x| \geq 1$.
ולכן יש טעם לדבר על אסימפטוטות רק ב $\pm\infty$.
נבדוק ונקבל ש:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 - \frac{\arccos\frac{1}{x}}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2 - \frac{\arccos\frac{1}{x}}{x} = 2$$

ו

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - 2x) = \lim_{x\to\infty} -\arccos\frac{1}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - 2x) = \lim_{x\to-\infty} -\arccos\frac{1}{x} = -1$$

ולכן האסימפטוטה ב $\pm\infty$ היא $2x - 1$.