תרגיל בית 3 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ט

3 באפריל 2019

1. זהות הקפטן.

   (א) הוכיחו את זהות הקפטן:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

   i. בדרך אלגברית.

   ii. בדרך קומבינטורית.

   (ב) השתמשו בזהות שהוכחתם בסעיף הקדם כדי להוכיח את הזהות הבאה:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

2. יהיו $k,m,n \in \mathbb{N}$ כך ש $0 \leq m \leq k \leq n$ הוכיחו:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

   (א) בדרך אלגברית.

   (ב) בדרך קומבינטורית.

3.

(א) יהיו $k,n,m \in \mathbb{N}$ כך ש $0 \leq k \leq n,m$. הוכיחו בדרך קומבינטורית:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

(ב) השתמשו בזהות שהוכחתם בסעיף הקודם, והוכיחו את הזהות הבאה:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

4. יהיו $k,m,n \in \mathbb{N}$ כך ש $k+m \leq n$ הוכיחו:שאר

$$\binom{n}{k+m} \leq \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m}$$

(א) בדרך אלגברית.

(ב) בדרך קומבינטורית.

5. יהיו $k,n \in \mathbb{N}$ כאשר $0 \leq k \leq n$. הוכיחו את הזהות הבאה:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

(א) בבדרך קומבינטורית (הדרכה: נחשוב על אגף ימין כסופר את כל תתי הקבוצות של $\{1,2,...,2n+1\} = [2n+1]$, כך שהאיבר $2n+1$ לא שייך אליהן. התאימו (באופן חח"ע ועל) בין הקבוצות הנספרות באגף שמאל לבין אלה שציינתי).

(ב) בדרך אלגברית (הדרכה: יש מספר זוגי של $0 \leq k \leq 2n+1$, אך רק חלקם נסכמים בצד שמאל).

6. נסמן: $[n] = \{1,2,\dots,n\}$. נסמן ב־A את אוסף המספרים הזוגיים ב־$[n]$, וב־B את אוסף המספרים האי־זוגיים ב־$[n]$. הוכיחו:

$$\sum_{k\in A} k\binom{n}{k} = \sum_{k\in B} k\binom{n}{k} = n2^{n-2}$$

7.

(א) הוכיחו:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$$

(ב) הוכיחו:

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k) \binom{n}{k} 2^k = n3^{n-1}$$

8. הוכיחו:

$$\sum_{i=a}^{b} \binom{n+i}{i} = \binom{n+b+1}{n+1} - \binom{n+a}{n+1}$$

9. חשבו את המקדמים הבאים (היעזרו, כמובן, במקדמים מולטינומיים):

(א) המקדם של ab^5c^3 בפיתוח של $(a+b+c+d)^9$.

(ב) המקדם של a^5b^4c בפיתוח של $(2a-3b+c)^{10}$.

(ג) המקדם של b^{10} בפיתוח של $(2a+3b+c)^{10}$.

(ד) המקדם של y^{24} בפיתוח של $(1+y^2+y^9)^{25}$.

(ה) המקדם של x^{21} בפיתוח של $(1+x^5+x^8)^{100}$.