# אלגברה מופשטת - תרגיל 1

**<u>שאלה 1</u>**

בדקו האם קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ מהווה אגודה לגבי הפעולות הבינאריות הבאות:

א) $a*b=a^2+ab$

ב) $a*b=\sqrt{a+b}$

ג) $a*b=(a^2+b^2)/2$

**<u>שאלה 2</u>**

בדקו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות עם הפעולות הנתונות האם היא: אגודה/ מונואיד/ חבורה. כמו כן, בדקו האם הפעולה היא קומוטטיבית.

א. $(\mathbb{Z},\bullet)$ כאשר $a\bullet b=a+b+2$;

ב. $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$ (עם כפל מודולו 4);

ג. $(\mathbb{Z},-)$;

ד. $(P(X),\Delta)$, באשר $X$ קבוצה כלשהי ו-$\Delta$ ההפרש הסימטרי המוגדר ע"י $A\Delta B=(A\bigcup B)\setminus(A\cap B)$ לכל $A,B\in P(X)$.

**<u>שאלה 3</u>**

א. תהיינה $(H,*),(G,\bullet)$ חבורות. נגדיר פעולה $\cdot$ על המכפלה הקרטזית $G\times H$ כדלהלן: $(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2)=(g_1\bullet g_2,h_1*h_2)$.
הוכיחו כי $G\times H$ היא חבורה תחת פעולה זו.

ב. הוכיחו שהחבורה $\Omega_2\times\Omega_2$ היא לא ציקלית.

## <u>שאלה 4</u>

א) האם $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} | \, a,b \in R, a^2+b^2>0 \right\}$ היא אגודה, מונואיד או חבורה (ביחס לפעולת כפל מטריצות)?

ב) תהי $G=\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | \, A,B,C \in \mathbb{R} \right\}$. הוכיחו ש- G היא חבורה ביחס לכפל מטריצות (חבורה זו נקראת **Heisenberg group**). האם היא אבלית?

## <u>שאלה 5</u>

א. הראו שכל אגודה $S$ אפשר להרחיב למונואיד $S'=S\cup\{e\}$, אם נגדיר את $e$ להיות איבר היחידה במבנה החדש.

ב. תארו את המונואיד המתקבל לאחר חזרה $n$ פעמים על הבניה של הסעיף הקודם, כאשר מתחילים עם מונואיד האפס $M=\{0\}$.

## <u>שאלה 6</u>

תהי $G$ חבורה ונניח שמתקיים $(ab)^2=a^2b^2$ לכל $a,b\in G$. הוכיחו ש- $G$ אבלית.

## <u>שאלה 7</u>

הוכיחו ש:

א) b מחלק את a אמ"מ $a\mathbb{Z}$ היא ת"ח של $b\mathbb{Z}$.

ב) $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=(a,b)\mathbb{Z}$

ג) $a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z}=[a,b]\mathbb{Z}$.

## <u>שאלה 8</u>

א. מצאו (באמצעות אלגוריתם אוקלידס) את המחלק המשותף המקסימלי: $(5614,1260)$.

ב. מצאו $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ כך ש- $1525\alpha+927\beta=1$.

# בהצלחה!