

תרגיל בית 2 - טופולוגיה

שאלה 1

תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה ה-p-adic באופן הבא: עבור $p \in \mathbb{N}$
ראשוני מגדירים מטריקה על \mathbb{Z}

$$k(x, y) = \max \{i : p^i \mid (x - y)\} \text{ עבור } , d_p(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{p^{k(x, y)}} & x \neq y \end{cases}$$

א. הוכיחו ש $p^n \xrightarrow{d_p} 0$.

ב. תארו את הכדור $B_{d_7}\left(3, \frac{1}{49}\right)$ במרחב (\mathbb{Z}, d_7) .

ג. עבור $t \in \mathbb{Z}$ מצאו דוגמא לסדרה לא קבועה במרחב (\mathbb{Z}, d_3) המתכנסת ל- t .

שאלה 2

יהיו $x_1, x_2 \in (X, d)$ ו- $r_1, r_2 > 0$ ויהיו $B(x_1, r_1), B(x_2, r_2)$ כדורים פתוחים שחיתוכם אינו ריק. תהי $p \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ ו- $r = \min\{r_1 - d(p, x_1), r_2 - d(p, x_2)\}$ הוכיחו ש- $B(p, r) \subseteq B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$.

שאלה 3

הגדרה: תהי $\{x_n\}$ סדרה במרחב מטרי כלשהו (X, d) . נאמר שהסדרה היא "קבועה לבסוף" אם קיים $x \in X$ כך שקיים $n_0 \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $n \geq n_0$ מתקיים $x_n = x$.

א. הוכיחו כי בכל מרחב מטרי, כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.

- ב.** הוכיחו כי סדרה מתכנסת במרחב מטרי **דיסקרטי** אם ורק אם היא קבועה לבסוף.
- ג.** אפיינו את סדרות הקושי במרחב הדיסקרטי (כלומר, נסחו תנאי מספיק והכרחי להיות סדרה כלשהי סדרת קושי, והוכיחו תנאי זה!).
- ד.** הסיקו שכל מרחב דיסקרטי הוא שלם.

שאלה 4

במרחב ℓ_∞ הראו שהסדרה $x_n = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{2n}, \frac{n+3}{3n}, \dots \right)$ מתכנסת, ומצאו את גבולה.

שאלה 5

- א.** הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: יהי (X, σ) מרחב מטרי, ויהי (Y, σ_Y) תת מרחב מטרי שלו. תהי $\{x_n\} \subseteq Y$ ו- $y \in Y$. אזי $x_n \xrightarrow{\sigma_Y} y$ אם"מ $x_n \xrightarrow{\sigma} y$.

נתבונן במרחב $\langle \mathbb{I}, d \rangle$ כאשר \mathbb{I} הוא קבוצת המספרים האי-רציונאליים, ו- d היא המטריקה הסטנדרטית המושרית מ- \mathbb{R} . נגדיר את הסדרה הבאה:

$$x_n = \frac{n + \sqrt{2}}{n - \sqrt{2}}$$

- ב.** הוכיחו שהסדרה $\{x_n\} \subseteq \mathbb{I}$.
- ג.** הוכיחו שהסדרה אינה מתכנסת בתת המרחב המטרי $\langle \mathbb{I}, d \rangle$.

שאלת אתגר (לא להגשה)

הראו שאם $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי ו- d המטריקה המושרה מהנורמה אזי **לא**
קיימים כדורים **שונים** $B(a_1, r_1), B(a_2, r_2)$ כאשר $r_1 < r_2$ ו- $B(a_1, r_1) \supset B(a_2, r_2)$.

בהצלחה!