מבוא לאנליזה מתקדמת תש"ף מועד א'

מרצה: תמר בר-און
מתרגל: אריאל ויצמן
משך המבחן: 3 שעות.

1. מצאו את כל המספרים המרוכבים $z \in \mathbb{C}$, שמקיימים $e^z = 1 + i$.
פתרון:
$1 + i = cis(\frac{\pi}{4})$. כלומר, $r = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$. לכן מנוסחא שלמדנו בכיתה, כל המקורות שלו הם:

$$\ln 1 + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi) = i(\frac{\pi}{4}) + 2\pi k)$$

2. הוכיחו שלכל מספר מרוכב $z \in \mathbb{C}$ מתקיים:

$$\cos(2z) = 2\cos^2 z - 1$$

פתרון:

ניזכר כי

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

ולכן

$$2\cos^2 z - 1 = 2\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4}\right) - 1 =$$

$$\frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2} = \cos(2z)$$

3. קבעו האם הפונקציה הבאה גזירה באמצעות משוואות קושי-רימן. במידה וכן, חשבו את הנגזרת.

$$f(z) = e^{(z^2)}$$

פתרון:

נכתוב $z = x + iy$. אז $z^2 = x^2 + 2xyi - y^2$. ולכן

$$f(x+iy) = e^{x^2+2xyi-y^2} = e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i\sin(2xy))$$

נסמן: $U = e^{x^2-y^2}\cos(2xy), V = e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$

לכן:

$$U_x = 2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy)$$

$$U_y = -2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy)$$

$$V_x = 2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy) + 2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy)$$

$$V_y = -2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy) + 2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy)$$

מתקיים: $U_x = V_y, U_y = -V_x$ ולכן הפונקציה גזירה.

$$f' = U_x + iV_x$$

4. מצאו פתרון כללי למד"ר הבאה (ניתן להשאיר את הפתרון בצורה סתומה):

$$(x^2-1)y' = x\cos^2 y$$

פתרון:

ראשית נסדר את המשוואה:

$$y' = \frac{x}{x^2-1}\cos^2 y$$

פתרונות סינגורליים:

$$\cos^2 y = 0 \Longrightarrow \cos y = 0 \Longrightarrow y = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

כעת:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2-1}\cos^2 y$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{xdx}{x^2-1}$$

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \frac{x}{x^2-1}dx$$

$$\tan y = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + c$$

5. מצאו פתרון כללי למד"ר הבאה:

$$y'' + 3y' + 4y = 2e^{2x}$$

פתרון:

ראשית נפתור את המד"ר ההומוגנית המתאימה. המשווה האופיינית היא $\lambda^2+3\lambda+4=0$,
ופתרונותיה הן: $-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$. לכן הפתרון הכללי של המד"ר ההומוגנית הוא:

$$y_h = c_1 e^{-\frac{3}{2}x}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 e^{--\frac{3}{2}x}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}$$

מכיוון ש2 אינו פתרון של המשוואה האופיינית, ננחש פתרון פרטי מהצורה $y_p = de^{2x}$.
מכאן: $y_p' = 2de^{2x}$
$y_p'' = 4de^{2x}$
נציב במשוואה:

$$4de^{2x} + 3(2de^{2x}) + 4de^{2x} = 2e^{2x}$$

$14d = 2$
$d = \frac{1}{7}$
והפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 e^{-\frac{3}{2}x}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 e^{--\frac{3}{2}x}\sin\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{7}e^{2x}$$