פתרון – תרגיל בית 3 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

שאלה 1 [15 נק']
שחקן מטיל שתי קוביות משחק הוגנות, לבנה ושחורה. לאחר שראה את תוצאות ההטלה, a ו- b, הוא בוחר מספר שלם שנמצא בקטע [a, b] בהסתברות שווה. לדוגמה: אם הקוביות הראו 4,6 המספר הנבחר יכול להיות אחד מהמס' 4,5,6 בהסתברות 1/3. אם ידוע שאחרי הטלת הקוביות נבחר המספר 6, מה ההסתברות שהקובייה הלבנה הראתה 6 בהטלה?

פתרון:

$C =$ המספר הנבחר הוא 6

$A_i =$ הקוביה הלבנה הראתה i

כדי לחשב את $P(A_6|C)$ בעזרת נוסחת בייס, עלינו לחשב קודם את $P(C|A_i)$, $i=1,...,6$.
עבור $i=1,...,5$, אם קרה A_i אז כדי שיקרה C הקוביה השחורה חייבת להראות 6, וכן 6 צריך להיבחר מבין $i,...,6$. לכן $P(C|A_i)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6-i+1}$. את $P(C|A_6)$ נחשב לפי נוסחת ההסתברות השלמה (כאשר עוברים על כל התוצאות האפשריות של הקוביה השחורה) ונקבל $P(C|A_6)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{k}=\frac{1}{6}\cdot\frac{49}{20}$. לכן:

$$P(A_6|C)=\frac{P(C|A_6)P(A_6)}{\sum_{i=1}^{6}P(C|A_i)P(A_i)}=\frac{\frac{1}{36}\cdot\frac{49}{20}}{\frac{1}{36}(\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{6-i+1}+\frac{49}{20})}=\frac{49}{78}$$

שאלה 2 [15 נק'] {פתרון חסר...}
לקוחות מגיעים למרכז שירות של חברה סלולרית לפי התפלגות פואסון. בממוצע מגיעים 4 לקוחות בדקה.

א. אם ידוע שלפחות לקוח אחד הגיע בדקה מסויימת, מה ההסתברות שהגיעו סה"כ 3 לקוחות באותה דקה?
ב. לבדיקת איכות השירות, מחליטים בחברה לדגום 10 קטעי זמן בני דקה כל אחד (לא חופפים) ביום עבודה מסויים, ולרשום את מספר הלקוחות המגיעים באותה דקה. אם באותו קטע זמן (דקה) הגיעו יותר מ- 4 לקוחות , הקטע ייחשב עמוס. מה ההסתברות שיהיו לפחות 2 קטעים עמוסים כאלה מבין כל קטעי הזמן שנדגמו?

פתרון:

נסמן ב- X – את מספר הלקוחות המגיעים למרכז השירות בדקה, $X\sim Poi(4)$.

א). נשתמש בנוסחת ההסתברות המותנה:

$$P(X=3\mid X\ge 1)=\frac{P(X=3\cap X\ge 1)}{P(X\ge 1)}=\frac{P(X=3)}{P(X\ge 1)}=\frac{P(X=3)}{1-P(X=0)}$$

$$=\frac{\left(4^3e^{-4}\right)/3!}{1-\left(4^0e^{-4}\right)/0!}\approx 0.2$$

ב). תחילה נחשב את ההסתברות שקטע זמן כלשהו עמוס:

$$P(Busy) = P(X > 4) = 1 - P(X \le 4)$$
$$= 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)\right]$$
$$= 1 - \left[e^{-4} + 4e^{-4} + 8e^{-4} + \tfrac{32}{3}e^{-4} + \tfrac{32}{3}e^{-4}\right] = 1 - 0.6288 = 0.3712$$

נסמן את המ"מ הסופר את מספר הקטעים העמוסים ב-Y. אזי Yמתפלג $Y \sim Bin(10, 0.3712)$.
ההסתברות המבוקשת:

$$P(Y \ge 2) = 1 - P(Y \le 1) = 1 - \left[P(Y=0) + P(Y=1)\right]$$
$$= 1 - \left[\binom{10}{0}0.3712^0 \cdot 0.6288^{10} + \binom{10}{1}0.3712^1 \cdot 0.6288^9\right] = 0.9333$$

<u>שאלה 3 [24 נק']</u>
בקו ייצור כל פריט תקין בהסתברות 0.7, ללא תלות בפריטים האחרים. מתחילים לייצר פריטים עד אשר מיוצר פריט פגום ואז נפסק מיד הייצור ע"י בקרת האיכות.

א. מצא את פונקציית ההסתברות של מספר הפריטים שנוצרו <u>כולל</u> הפריט הפגום.
ב. מצא את פונקציית ההסתברות של מספר הפריטים שנוצרו <u>ללא</u> הפריט הפגום.
ג. מה ההסתברות שנוצרו לפחות 5 פריטים תקינים?

<u>עתה מפעילים את קו הייצור ללא בקרת איכות ומייצרים 10 פריטים בדיוק ועוצרים:</u>

ד. מצא את פונקציית ההסתברות של מספר הפריטים התקינים שנוצרו.
ה. מה ההסתברות שהיו בייצור לפחות 2 פריטים פגומים?
ו. בדקו 7 פריטים שנוצרו ומצאו שהם תקינים. מה ההסתברות שמ- 3 הפריטים נותרים, לכל היותר פריט אחד פגום?

<u>פתרון:</u>

א. נסמן X – מ"מ הסופר את מספר הפריטים שיוצרו כולל הפגום. אם פריט פגום מהווה "הצלחה" אזי ל-X יש פונקצית הסתברות גיאומטרית $X \sim G(0.3)$,
$P(X=k) = (0.3)0.7^{k-1},\ k = 1,2,\ldots$ **(שימו לב: k מתחיל מ-1).**

ב. נסמן Y – מ"מ הסופר את מספר הפריטים שנוצרו ללא הפגום, אזי Y = X-1.
גם ל-Y התפלגות גיאומטרית $Y \sim G(0.3)$ **ופונקצית ההסתברות היא**
$P(Y=k) = (0.3)0.7^{k},\ k = 0,1,\ldots$ **(שימו לב: k מתחיל מ-0 הפעם).**

ג. $$P(Y \ge 5) = \sum_{k=5}^{\infty}(0.3)0.7^k = (0.3)0.7^5\sum_{i=0}^{\infty}0.7^i = (0.3)0.7^5\frac{1}{1-0.7} = 0.16807$$
שימו לב שהשתמשנו בנוסחת סכום טור הנדסי.

ד. **במקרה זה מדובר ב-10 ניסויי ברנולי כאשר "הצלחה"="תקין" (ההיפך מקודם) ולכן $p = 0.7$. לפיכך, אם נסמן ב-Z – מ"מ הסופר את מספר הפריטים התקינים מ-10, אזי**

$$P(Z=k) = \binom{10}{k}(0.7)^k(0.3)^{10-k}$$

ה. **מתבקשים לחשב** $P(Z \le 8)$:

$$P(Z \le 8) = 1 - \left[P(Z=9) + P(Z=10)\right] = 1 - 10 \cdot 0.7^9 \cdot 0.3^1 - 0.7^{10} = 0.851$$

ו. **מתבקשים לחשב** $P(Z \ge 9 | Z \ge 7)$:

$$P(Z \ge 9 | Z \ge 7) = \frac{P(\{Z \ge 9\} \cap \{Z \ge 7\})}{P(Z \ge 7)} = \frac{P(Z \ge 9)}{P(Z \ge 7)}$$

$$= \frac{P(Z=9)+P(Z=10)}{P(Z=8)+P(Z=8)+P(Z=9)+P(Z=10)} = 0.2$$

<u>שאלה 4 [12 נק']</u>

כד מכיל 4 כדורים לבנים ו-4 כדורים שחורים. מוציאים באקראי 4 כדורים ללא החזרה. אם 2 מהם לבנים ו-2 שחורים הניסוי מסתיים. אם לא, מחזירים את הכדורים לכד ושוב מוציאים באקראי 4 כדורים וממשיכים כמקודם עד שיש בדיוק 2 לבנים בין ה-4 שהוצאו. מה ההסתברות לחזור על הניסוי בדיוק n פעמים?

<u>פתרון:</u>

נשים לב שמבצעים חזרות ב"ת של הניסוי המקרי: הוצאת מדגם של 4 כדורים מתוך כד המכיל 4 כדורים לבנים ו- 4 שחורים. הצלחה בניסוי היא הוצאת 4 כדורים שבדיוק 2 מהם לבנים.

מספר הכדורים המוצאים במדגם הוא מ"מ היפרגאומטרי עם הפרמטרים: m=4, N=8, n=4

ולכן ההסתברות להצלחה בכל אחת מהחזרות היא:

$$P = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{18}{35}$$

<u>הערה</u>: אפשר גם חשב ישירות משיקולים קומבינטורים תוך הסתמכות על העובדה שמרחב המדגם סימטרי (אחיד).

כלומר: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{18}{35}$

בשלב השני נסמן ב- X את מספר החזרות על הניסוי עד לקבלת ההצלחה הראשונה.

X הוא מ"מ גאומטרי עם הפרמטר $\frac{18}{35}$ ולכן: $P(X=n) = \left(1-\frac{18}{35}\right)^{n-1} \cdot \frac{18}{35} = \left(\frac{17}{35}\right)^{n-1} \cdot \frac{18}{35}$

שאלה 5 [12 נק']

מספר החולצות שקונה אדם הנכנס לחנות הוא $X+1$, כאשר $X \sim Bin(5,0.8)$, בלתי תלוי בקונים האחרים.
מספר האנשים שנכנסים לחנות במשך שעה מפולג פואסונית עם פרמטר 20. מצא את תוחלת מספר החולצות הנמכרות בחנות בשעה כלשהי.

פתרון:

יהי N – מספר הקונים הנכנסים לחנות בשעה, $N \sim Pois(20)$.

נסמן $S=\sum_{i=1}^{N}(X_i+1)$. נדרשים למצוא $E(S)$.

נחשב את התוחלת המותנה $E(S\mid N)$:

$$E(S\mid N=n) = E\left(\sum_{i=1}^{N}(X_i+1)\mid N=n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i+1)\mid N=n\right)$$
$$= E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i+1)\right) = \sum_{i=1}^{n}E(X_i)+n = n\cdot E(X_i)+n \overset{(*)}{=} 4n+n=5n$$

$$(*)\quad X_i \sim Bin(5,0.8) \Rightarrow E(X_i)=5\cdot 0.8=4$$

דהיינו, $E(S\mid N)=5N$.

כעת נעזר בנוסחת התוחלת הנשנית:

$$E\left(E(S\mid N)\right)=E(5N)=5E(N)=5\cdot 20=100$$

שאלה 6 [12 נק']

בכל אחת מ- 3 קופסאות יש 2 מחיצות. אחת הקופסאות מכילה בכל אחת מהמחיצות מטבע זהב, השניה מכילה בכל מחיצה מטבע כסף והשלישית מכילה באחת מהמחיצות מטבע כסף ובשניה מטבע זהב. קופסא אחת נבחרה באופן מקרי, לאחר מכן נבחרה מחיצה בקופסה באופן מקרי.

א. מה ההסתברות שבמחיצה שנבחרה יש מטבע כסף?
ב. המחיצה נפתחה ונמצא שם מטבע זהב. מה ההסתברות שבמחיצה השנייה מטבע כסף?

פתרון:

נסמן: S – נבחר מטבע כסף, G – נבחר מטבע זהב. B_i – נבחרה קופסה עם i מטבעות כסף ($i = 0,1,2$).

א). נעזר בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(S) = P(S\mid B_0)P(B_0)+P(S\mid B_1)P(B_1)+P(S\mid B_2)P(B_2)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1=\boxed{\frac{1}{2}}$$

ב). מטעמי סימטריה- $P(G)=P(S)=1/2$

נעזר בנוסחת ההסתברות המותנה:

$$P(S\mid G)=\frac{P(S\cap G)}{P(G)}=\frac{1/3}{1/2}=\boxed{\frac{2}{3}}$$