הערות ושאלות נא לשלוח למייל dvir1352@gmail.com

שיעור חזרה לקבוצה 01

אינפי 1 , מספר קורס 88-132

31.1.2013

המבחן יהיה בנוי מ6 שאלות, כל שאלה 18 נקודות, כך שיהיה אפשר לקבל 108. השאלות יהיו חישוב (התכנסות) וחלק מהשאליות יהיו הוכחות של דברים לא מסובכים מדי. המבחן יהווה בדיקה להאם אנו יודעים באיזה מבחן להשתמש.

טיפ למבחן : כשמגיעים לתרגיל קודם לנסות להבין אותו, ורק אז להתחיל לפתור. הבנת התרגיל זה חצי תשובה.

נעבור על כל החומר מההתחלה :

1. עברנו על המספרים הממשיים, בסיסי וברור.
2. דיברנו על חסמים, צריך לדעת תנאי של חסם מלעיל ומלרע.
3. סדרות :

- צריך לדעת גבול של סדרה מונוטונית. חשוב לדעת שתמיד יש גבול לסדרה מונוטונית, אבל לפעמים הוא אינסוף, אז אומרים שהיא לא חסומה.
- כל תת סדרה מתכנסת לגבול של סדרה מקורית
- תנאי קושי להתכנסות סדרה. התנאי הוא $\forall\varepsilon>0\ \exists\bar{n}\forall n,m\geq\bar{n}:|x_n-x_m|<\varepsilon$ עבור $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
- גבול עליון ותחתון : נגדיר $L_n:=\sup\{x_n,x_{n+1},\dots\}$ וגם $l_n:=\inf\{x_n,x_{n+1},\dots\}$ ולכן L_n יורדת מונוטונית וl_n עולה מונוטונית. גם כן הגדרנו $\lim_{n\to\infty}\sup x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n:=\inf_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}L_n$.
ובאופן דומה $\lim_{n\to\infty}\inf x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\sup_{n\to\infty}l_n=\lim_{n\to\infty}l_n$.
הוכחנו שמתקיים המשפט $\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=L\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\mathrm{x_n}=L$.

שאלה של סטודנט : אי שיוויון הממוצעים $\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2x_3\dots x_n}$.

הוכחה : נבחר $f(x)=e^x$, וידוע כי $f''(x)=e^x>0$ ועל כן היא קמורה.

ע״פ אי שיוויון ינסן נקבל $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\leq\lambda_1f(x_1)+\cdots\lambda_nf(x_n)$ וגם $\lambda_1+\cdots\lambda_n=1$ וגם $\lambda_i\geq0$. קיבלנו שמתקיים $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$. אם נרצה להוכיח כעת עבור $\sqrt[n]{a_1a_2a_3\dots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$ נצטרך להציב את $x_i=\ln a_i$ והוכחנו כבר כי $e^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}\leq\frac{e^{x_1}+e^{x_2}+\cdots+e^{x_n}}{n}$, אם נציב נקבל בדיוק את הרצוי.

שאלה של סטודנט : האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{1+(1+2+3+\cdots+n)}{1+2+3+\cdots+n}$ מתכנס/מתכנס בהחלט/מתבדר?

פתרון : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{1+(1+2+3+\cdots+n)}{1+2+3+\cdots+n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{1+\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{2}{n(n+1)})$ כעת נבדוק ע״פ מבחן דריכלה, או על פי לייבניץ שהוא בעצם מקרה פרטי של דרכילה, אם הטור מתכנס. ידוע כי $\ln(1+\frac{2}{n(n+1)})\sim\frac{2}{n(n+1)}\sim\frac{2}{n^2}$ והראנו שהוא מתכנס בהחלט, ולכן גם מתכנס.

שאלה של סטודנט : חשב את $\sqrt[3]{29}$. ברמת דיוק של 10^{-3}.

פתרון : נשתמש בנוסחת טיילור. נרשום את המספר כך $\sqrt[3]{27+2}=3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{27}}$.

ידוע כי $(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$. אנחנו רוצים לבדוק עבור $\varepsilon=10^{-3}$.

הערות ושאלות נא לשלוח למייל dvir1352@gmail.com

נסמן $(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+r_n$ עבור $r_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ כך ש $|r_n|\le 10^{-3}$ נציב כדי לקבל את הביטוי $f^{(n+1)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)(1+x)|_{x=c}^{\alpha-(n+1)}$ ונקבל $r_n=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\dots\left(\frac{1}{3}-n\right)}{(n+1)!(1+c)^{n+1-\alpha}}x^{n+1}$ עבור $x=\frac{2}{27}$ נציב הכל על מנת לקבל $|r_n|<\frac{1}{1000}$ וזה מתקיים ב*n=2* וקיבלנו כי הקירוב הוא $3+\frac{2}{27}$.

תרגיל של פרופסור אגרנובסקי: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$

פתרון: קודם כל נקביל את *x* לתחום $0<x<\pi$.

עבור $\alpha>1$ מתקיים ע"פ מבחן ההשוואה כי הוא מתכנס בהחלט כי $\frac{\sin(nx)}{n^\alpha}\le\frac{1}{n^\alpha}$.

עבור $0<\alpha<1$ מספיק להוכיח כי $\frac{1}{n^\alpha}$ יורדת מונוטונית לאפס. כי ברור ש$\sin(nx)$ תמיד חסום, ואז ע"פ מבחן דריכלה נקבל את התכנסות הטור.

הוכחנו את המשך התרגיל בהרצאה *11*.

תרגיל של פרופסור אגרנובסקי: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)$ וידוע כי $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2), x\to 0$ וז"א שמתקיים עבור $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. נציב כדי לקבל $\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1$ נכפיל בהתאם ונקבל $1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1=-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ כך ש$a_n=-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

שאלה של סטודנט: חישוב נגזרת של $\arctan x$.

פתרון: $\arctan x$ היא פונקציה הפוכה של $\tan x$. ז"א ש$(arctany)'=\frac{1}{(\tan x)'}=\frac{1}{\frac{1}{cos^2x}}=\frac{1}{1+tan^2x}=\frac{1}{1+y^2}$.

לדאוג לנסח נכון את ההוכחות ולא לחסוך בנימוקים, כל עוד הם מנוסחים מתמטית ולא בצורת סיפור.

מותר להביא מחשבון , לא גרפי.

בהצלחה!