חשבון אינפי 2 למדמ"ח

שיעור 2: שיטות אינטגרציה לאינטגרל הלא מסוים

הגדרה: $F(x)$ תיקרא פונקציה קדומה של $f(x)$ בקבוצה A אם מתקיים $\forall x \in A: \; F'(x) = f(x)$

הגדרה: האינטגרל הלא מסוים של $f = f(x)$ הוא אוסף כל הפונקציות הקדומות של f. סימון: $\int f(x)dx$.

למשל: פונקציה קדומה של $f(x) = x$ בכל הישר היא $F(x) = \frac{x^2}{2}$.

משפט: תהי $f(x)$ פונקציה. אם $F(x), G(x)$ שתי פונקציות קדומות שלה בקבוצה A אזי מתקיים שם $F(x) = G(x) + c$ כאשר c קבוע.

למשל: גם $G(x) = \frac{x^2}{2} + 2$ פונקציה קדומה של x. וכל פונקציה קדומה של x היא מהצורה $\frac{x^2}{2} + c$.

טבלה 1: טבלת פונקציות קדומות

$f(x)$	$F(x)$
0	1
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
x^{-1}	$ln\|x\|$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$a^x, a > 0$	$\frac{1}{ln(a)}a^x$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

הערה: בכל התשובות צריך להוסיף את הקבוע c לתשובה הסופית.

דוגמא 1: $f(x) = \frac{2x^4}{1+x^2}$

פתרון:

$$f(x) = 2\frac{x^4 - 1 + 1}{1 + x^2} = 2\frac{x^4 - 1}{1 + x^2} + 2\frac{1}{1 + x^2} = 2(x^2 - 1) + 2\frac{1}{1 + x^2}$$

ולכן

$$\int f(x)dx = 2\int (x^2-1)dx + 2\int \frac{1}{1 + x^2}dx = 2\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + 2\arctan(x) + c.$$

שיטת ההצבה

לפי כלל השרשרת מתקיים

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

ולכן

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int (F(g(x)))'dx = F(g(x)) + c$$

1. השלמה לריבוע

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1\frac{1}{4}} = \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1\frac{1}{4}}$$

$$= [t = x + \frac{1}{2} \Rightarrow dt = dx] = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan(t) + c = \arctan\left(x + \frac{1}{2}\right) + c$$

.2

$$\int xe^{x^2}dx = [t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx] = \int e^t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e^t + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

.3

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = [t = \cos(x) \Rightarrow dt =$$

$$-\sin(x)dx] = \int \frac{1}{t}(-dt) = -\ln|t| + c = -\ln|\cos(x)| + c$$

.4

$$\int x^3(3x^2-1)^{17}dx = [t = 3x^2 - 1 \Rightarrow dt = 6xdx] =$$

$$\int \left(\frac{t+1}{3}\right) t^{17}\frac{dt}{6} = \frac{1}{18}\int t^{18} + t^{17}dt = \frac{1}{18}\left(\frac{t^{19}}{19} + \frac{t^{18}}{18}\right) + c = ...$$

.5

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \;\; a > 0 = \int \frac{1}{\sqrt{a^2}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}dx = [t = \frac{x}{a} \Rightarrow dt = \frac{1}{a}dx]$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}adt = \frac{a}{a}\arcsin(t) + c = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

.6

$$\int \sin^{42}(x)\cos(x)dx = [t = \sin(x), \Rightarrow dt = \cos(x)dx] = \int t^{42}dt$$

$$= \frac{t^{43}}{43} + c = \frac{\sin^{43}(x)}{43} + c.$$

אינטגרציה בחלקים

מחוקי הגזירה מתקיים $(f \cdot g)' = f'g + g'f$ ולכן

$$\int g'(x)f(x)dx =$$

$$\int [f(x)g(x)]'dx - \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

.1

$$\int x\ln(x)dx = [g'(x) = x, f(x) = \ln(x)]$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + c$$

.2

$$\int x\arctan(x)dx = [u' = x, v = \arctan(x)] = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}(x - \arctan(x)) + c$$

.3

$$F(x) = \int e^x\cos(x)dx = [g'(x) = \cos(x), f(x) = e^x] = e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x)dx$$

$$= [g'(x) = \sin(x), f(x) = e^x] = e^x\sin(x) - \left(-e^x\cos(x) - \int -e^x\cos(x)dx\right)$$

$$= e^x(\sin(x) + \cos(x)) - F(x)$$

ומכאן ש

$$2F(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$$

ולכן

$$F(x) = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2}$$

.4 $I_m(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^m}dx$

$$I_m(x) = [g' = 1, f = \frac{1}{(1+x^2)^m}] = \int 1\cdot\frac{1}{(1+x^2)^m}dx =$$

$$x\frac{1}{(1+x^2)^m} - \int \frac{-x(2mx)}{(1+x^2)^{m+1}}dx = \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{m+1}}dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m(I_m - I_{m+1})$$

ולכן

$$I_{m+1} = \frac{x}{2m(1+x^2)^m} + I_m \frac{(2m-1)}{2m}$$

עם תנאי התחלה $I_1 = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

הצבות טריגונומטיות

1. מכפלה של $\cos, \sin$ שאחד מהם בחזקה אי־זוגית, במקרה זה נבצע הצבה טריגונומטרית $t = \cos(x)$ או $t = \sin(x)$:

$$\int \frac{\sin(x)}{\sqrt{2-\cos^2(x)}} dx = [t = \cos(x) \Rightarrow dt =$$

$$-\sin(x)dx] = \int \frac{-dt}{\sqrt{2-t^2}} = -\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c = -\arcsin\left(\frac{\cos(x)}{\sqrt{2}}\right) + c$$

2. אם שניהם זוגיים־ ניתן לפעמים לפשט את הביטוי בעזרת זהויות טריגונומטריות

$$\int \sin^2(x)\cos^4(x)dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos(2x))(1+2\cos(2x)+\cos^2(2x))dx$$

$$= \frac{1}{8}\int 1+\cos(2x)+\cos^2(2x)-2\cos^2(2x)-\cos^3(2x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int 1+\cos(2x)+\frac{1+\cos(4x)}{2} - 2\frac{1+\cos(4x)}{2} - \frac{1+\cos(4x)}{2}\cos(2x)dx$$

תמשיכו לבד (בעזרת הנוסחא $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B))$)

3. שימוש בזהות $\sin^2(t)+\cos^2(t) = 1$:

$$(a>0)\int \sqrt{a^2-x^2}dx = [x = a\sin(t) \to dx = a\cos(t)dt,$$

$$= \int a\sqrt{a^2 - a^2\sin^2(t)}\cos(t)dt = a^2\int \sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)dt \underset{*}{=} a^2\int \cos^2(t)dt$$

$$= a^2\int \frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}dt = a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right) + c$$

$$= a^2\left(\frac{\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}{2} + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)}{4}\right) + c$$

$*$: הנחנו ש $\cos(t) \geq 0$ כי $t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

אפשר לפשט את הביטוי האחרון אם משתמשים בזהות $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

4. הצבה אוניברסלית ־ $t = \tan(\frac{x}{2})$ ואז

$$dt = \frac{\frac{1}{2}\cos^2(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}dx = \frac{1}{2}(1+t^2)dx \to dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-t^t}{1+t^2}$$

$$\sin(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}$$

דוגמא

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)+\cos(x)} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+2t}$$

$$= \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + c = \ln\left|1 + \tan\frac{x}{2}\right| + c.$$

5. חיסול שורשים בעזרת פונקציות טריגונומטריות:

- אם באינטגרל מופיע הביטוי $\sqrt{a^2 - x^2}$ נציב $x = a\cos(t)$ או $x = a\sin(t)$.
- אם באינטגרל מופיע הביטוי $\sqrt{x^2 - a^2}$ נציב $x = \frac{a}{\cos(t)}$ או $x = \frac{a}{\sin(t)}$.
- אם באינטגרל מופיע הביטוי $\sqrt{a^2 + x^2}$ נציב $x = a\tan(t)$.

דוגמא

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \left[x = \frac{1}{\cos(t)}, dx = \frac{\sin(t)dt}{\cos^2(t)}\right] = \int \frac{\frac{\sin(t)dt}{\cos^2(t)}}{\frac{1}{\cos^2(t)}\sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)}-1}}$$

$$= \int \frac{\sin(t)dt}{\sqrt{\frac{1-\cos^2(t)}{\cos^2(t)}}} = \int \frac{\sin(t)dt}{\sqrt{\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}} \underset{*}{=} \int \sqrt{\cos^2(t)}dt \underset{**}{=} \int \cos(t)dt$$

$$= \sin(t) + c = \sqrt{1-\cos^2(t)} + c\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + c = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c$$

$*$: הנחנו ש $\sin(t) \geq 0$ כי $t = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \in [0,\pi]$.

$**$: הנחנו ש־$\cos(t) > 0$, אם היינו מניחים ש־$\cos(t) < 0$ היינו מקבלים

$$-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + c = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}} + c = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c$$

כאשר השתמשנו בעובדה ש־$\sqrt{x^2} = -x$ כי $x = \frac{1}{\cos(t)} < 0$.