מד"ר,תרגול 9

21 בינואר 2014

עד עכשיו במקרה א' ראינו מה קורה כאשר ההפרש בין השורשים אינו שלם. ראינו גם כי עם הסינגולריות רגולריות צריך להתקיים

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{q(x)}{p(x)} \\ q_0 &= \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{r(x)}{p(x)} \end{aligned}$$

אז ניתן להסיק את המשוואה האופיינית (האינדיקציאלית):דש

$$\lambda(\lambda-1)+p_0\lambda+q_0=0$$

מקרה ב':

אם $\lambda_1=\lambda_2$ אז $y_1(x)$ כמו במקרה א':

$$y_2(x)=\frac{\partial y(x,\lambda)}{\partial\lambda}\mid_{\lambda=\lambda_2}=y_1(x)\cdot\ln(x)+\sum b_n(x-x_0)^{n+\lambda_1}$$

מקרה ג':

$\lambda_1-\lambda_2$ מספר שלם אז $y_1(x)$ כרגיל וכן

$$y_2(x)=\frac{\partial}{\partial x}\left[(\lambda-\lambda_2)\cdot y(x,\lambda)\right]\mid_{\lambda=\lambda_2}$$

דוגמה 1: פתור את המד"ר סביב $x=0$:

$$x^2y\prime\prime+xy\prime+x^2y=0$$

פתרון : נחפש האם ב$x=0$ יש נק' רגולרית:

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{x^2}=1 \\ q_0 &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^2}{x^2}=0 \end{aligned}$$

לכן נקבל את המשוואה:

$$\begin{aligned} \lambda^2-\lambda+\lambda &= 0 \\ \lambda^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 0 \end{aligned}$$

לכן $\lambda=0$ שורש מריבוי שני ואנחנו נמצאים במקרה ב'. לכן הפתרון:

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\lambda}$$

עבור y_2 יש לגזור לפי λ ולהציב $\lambda=0$: $y_2(x)=\frac{\partial y_1(x,\lambda)}{\partial\lambda}\mid_{\lambda=0}$ נותר לנו למצוא תנאים על המקדמים. נציב במד"ר:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\lambda} \\ y\prime(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_nx^{n+\lambda-1} \\ y\prime\prime(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_nx^{n+\lambda-2} \\ x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)x^{n+\lambda-2} &+ x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)x^{n+\lambda-1}+x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\lambda}=0 \\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)x^{n+\lambda} &+ \sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\lambda)x^{n+\lambda}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\lambda+2}=0 \\ a_0\lambda(\lambda-1)x^{\lambda}+a_1(1+\lambda)\lambda x^{\lambda+1}+a_0\lambda x^{\lambda}+a_1(1+\lambda)x^{1+\lambda} &+ \\ +\sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)+(n+\lambda)a_n+a_{n-2}\right]x^{n+\lambda}=0 & \end{aligned}$$

נציב $\lambda=0$:

$$\begin{aligned} a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n\cdot n(n-1)+na_n+a_{n-2}\right]x^n &= 0 \\ n^2a_n+a_{n-2} &= 0 \\ a_1 &= 0 \end{aligned}$$

וa_0 קבוע לא ידוע.

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n^2}$$

עבור n אי זוגי $a_n = 0$. עבור n זוגי: $a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{4k^2} = \frac{-a_{2k-4}}{4k^2(2k-2)^2} = (-1)^k \cdot a_0 \cdot \frac{1}{(2k)^2(2k-2)^2\dots 2^2}$.

$$\boxed{y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} = a_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{1}{2^{2k}(k!)^2} \cdot x^{2k}}$$

$$y_2(x) = \frac{\partial y_1(x,\lambda)}{\partial \lambda} |_{\lambda=0} = y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

כדי למצוא את b_n צריך להציב במשוואה.

התמרות לפלס

הגדרה: התמרת לפלס :

$$g(s) = \mathcal{L}\left(f(t)\right) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$

התמרת לפלס ההפוכה:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{c+ist}g(s)ds$$

כאשר c נמצאת מימין לכל קוטב של g (קוטב הוא נקודת אי ומוגדרות עבור $(x-x_0)g_1(s)$.
התמרת לפלס מעבירה ממרחב הזמן למרחב התדר.

תכונות:

1. $L(\alpha f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st}\alpha f(t)dt = \alpha\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt = \alpha L(f(t)) \quad \alpha \in \mathbb{C}$.

2.

$$\begin{aligned}\alpha,\beta \in \mathbb{C}, \quad L(\alpha f(t) + \beta g(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))dt \\ &= \alpha\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt + \beta\int_0^{\infty} e^{-st}g(t)dt = \alpha L(f(t)) + \beta L(g(t))\end{aligned}$$

תרגיל: חשבו את התמרות לפלס הבאות:

1. $f(t) = 1$.
2. $f(t) = t$
3. $f(t) = e^{at}$
4. $f(t) = \sin t$
5. $f(t) = \cos t$
6. $f\prime(t)$

פתרון:

1. $L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{e^{-st}}{-s} \mid_0^\infty = \frac{1}{s}$
2. $L(f(t)) = \int_0^\infty te^{-st}dt = -\frac{t}{s}e^{-st} \mid_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}e^{-st} \mid_0^\infty = \frac{1}{s^2}$
   בצורה כללית, נקבל: $L(t^n) = \frac{1}{s^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \ldots$
3. $L(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \mid_0^\infty = \frac{1}{s-a}$
4.

$$L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}\sin tdt = \frac{e^{-st}}{-s}\cdot\sin t \mid_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos tdt = \frac{1}{s}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\cos t \mid_0^\infty - \frac{1}{s}\int e^{-st}\sin tdt\right] = \frac{1}{s^2} -$$

ולכן $L(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}, L(\sin(at) = \frac{a}{s^2+a^2}$.

5.

$$\begin{aligned} L(f(t)) &= \int_0^\infty e^{-st}\cos tdt = \frac{e^{-st}}{-s}\cdot\cos t \mid_0^\infty - \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin tdt = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1} = \frac{s^2+1-1}{s(s^2+1)} = \frac{s}{s^2 +} \\ L(\cos(at)) &= \frac{s}{s^2+a^2} \end{aligned}$$

6. $f\prime(t) = \int_0^\infty f\prime(t)e^{-st}dt = f(t)\left(e^{-st}\right) \mid_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = -f(0) + sL(f(t))$ וכך לדוגמה:

$$L(\cos(at)) = -\frac{1}{a}\cdot\sin(a\cdot 0) + s\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

פתרון מד"ר באמצעות התמרת לפלס

$$\begin{cases} x''(t)+ax'(t)+bx(t) &= f(t) \\ x(0) &= \alpha_0 \\ x'(0) &= \beta_0 \end{cases} \Longleftarrow L(x''(t)+\alpha x'(t)+bx(t)) = L(f(t)):$$

$$\begin{aligned} sL(x''(t)+ax'(t)+bx(t)) &= L(f(t)) \\ sL(x'(t))-x'(0)+asg(s)-ax(0)+bg(s) &= h(s) \\ s^2g(s)-sx(0)-\beta_0+asg(s)-a\alpha_0+bg(s) &= h(s) \\ \left(s^2+as+b\right)g(s) &= h(s)+a\alpha_0+s\alpha_0+\beta_0 \end{aligned}$$

$$g(s)=\frac{h(s)+a\alpha_0+s\alpha_0+\beta_0}{s^2+as+b}$$

תרגיל: חשבו את $x(t)$ עבור $\begin{cases} x''+x=1 \\ x(0)=0 \\ x'(0)=0 \end{cases}$.

$$g(s)=\frac{\frac{1}{s}}{s^2+1}=\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{a}{s}+\frac{bs+c}{s^2+1}$$

$$1 = as^2+a+bs^2+cs$$

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ c &= 0 \\ a &= 1 \Rightarrow b=-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1} \\ x(t) &= 1-\cos(t) \\ x' &= \sin(t) \\ x'' &= \cos(t) \\ x''+x &= 1 \end{aligned}$$

כדרוש.