מושגים לחזרה

$P(X)$ = קב' כל תתי הקבוצות של X.
$= \{A \mid A \subseteq X\}$

- יחס שקילות על קבוצה
- מרחב טופולוגי X; τ טופולוגיה מעל X

קב' פתוחה - τ

קב' סגורה - τ - המשלים.

$a \in X$; N - סביבה של a

נק' הצטברות של קב'

סגור של קב' $S \subseteq X$: $\bar{S}$

$B \subseteq P(X)$ בסיס לטופולוגיה τ

קבוצה צפופה בX: $\bar{S} = X$

פונקציה - רציפה בנק', רציפה במרחב.

הגדרה

קומפקטיות: מ"ט (X,τ) נקרא קומפקטי אם לכל כסוי פתוח יש לו תת כיסוי סופי.

טענה - מ"ט (X,τ) הוא קומפקטי אמ"מ מתקיימת התכונה הבאה:
אם $A=\{A_\alpha\}_I$ משפחה של תת קב' סגורות כך שכל חיתוך סופי של קב' מתוכה אינו ריק ($n \in \mathbb{N}$, $\forall_{1\le i\le n} A_i \in A \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$)
אז: $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$

הוכחה - $\Leftarrow$ נניח X קומפקטי, ותהי $A=\{A_\alpha\}_I$ משפ' תת' סגורות כך שכל חיתוך סופי של קב' מתוכה אינו ריק.
אז: לכל $\alpha \in I$ נגדיר $F_\alpha = X - A_\alpha$ - פתוחה.
ומתקיים: לכל n: $\bigcup_{k=1}^{n} F_k = X - \bigcap_{k=1}^{n} A_k \subsetneq X$
כלומר אין תת משפחה סופית של $\{F_\alpha\}_I$ שמכסה את X.
ומכיון שזו הקומפקטיות של X, ש $\bigcup_I F_\alpha$ לא מכסה את X.
לכן $X \neq \bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha = X - \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \Rightarrow \bigcap_I A_\alpha \neq \emptyset$ כנדרש

$\Rightarrow$ נניח (X,τ) מקיים את התכונה שלעיל ויהי $\{F_\alpha\}_I$ כסוי פתוח של X.
נגדיר: $\forall \alpha \in I:\ A_\alpha := X - F_\alpha$

אזי מתקיים: 1) A_α סגורה $\forall \alpha\in I$

2) $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = X - \bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha = X - X = \emptyset$

ולכן, לפי הנתון, קיים חיתוך סופי ריק של תת משפחה $\{A_\alpha\}_I$:

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \emptyset$$

אזי גם $\emptyset = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = X - \bigcup_{k=1}^{n} F_k$

$\Leftarrow$ $\bigcup_{k=1}^{n} F_k = X$

כלומר $F_1, \dots, F_n$ מהווה תת כיסוי סופי. $\Leftarrow$ (X,τ) קומפקטי.

- המשך הרצאה:

מושגים - מרחב לינארי X מעל שדה $(\mathbb{R})$ (מ"ו)

נורמה $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$: $\forall x: x \mapsto \|x\|$

כך ש- (1) $\|x\| \geq 0$ (2) $\|x\| = 0 \iff x = \bar{0}$

(3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ 4) אי ש' $\triangle$: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

מסמנים $\|\cdot\|$ נגדיר:

מרחק: $\rho(x,y) := \|x-y\|$

התכנסות - $x_n \to x \iff \|x_n - x\| \to 0$

כדור (סביב $a\in X$, ברדיוס $r\in\mathbb{R}$):

$$B(a,r) = \{x\in X : \|a-x\| < r\}$$

עבור מ"נ $(X, \|\cdot\|)$ הקבוצה $\mathbb{B} = \{B(a,r) \mid a\in X,\ r\in\mathbb{R},\ 0<r<\infty\}$

היא בס"ס לטופולוגיה אחת ויחידה $\tau_{\|\cdot\|}$ המושרית ע"י $\|\cdot\|$ מעל X

כאן: קב' פתוחה: $A \subseteq X$ אם $\forall a\in A\ \exists \varepsilon>0: B(a,\varepsilon)\subset A$

קב' סגורה: $S\subseteq X$ אם לכל סדרה $\{s_n\}\subset S$

כך ש $s_n \to s \Rightarrow s\in S$

(לפי הגדרה: S סגורה $\iff A = S^c = X - S$ פתוחה)

כאן גם $y \neq x$; f y,x מ"נ

אי שוויון המשולש: פונקציה חלה- $\|a\|_x \leq \|b\|_x \Rightarrow \|A(b)\|_Y \leq \|A(a)\|_Y$.

תרגיל: הוכח: כל קבוצה פתוחה $G\subseteq\mathbb{R}$ הינה איחוד בן מנייה של

קטעים זרים פתוחים ב-$\mathbb{R}$

הערה: לכל $x\in G$ יהי I_x הקטע הפתוח הגדול ביותר ב-$\mathbb{R}$

כך שמתקיים $x\in I_x\subseteq G$

נניח כי $x,y\in G$ וגם $I_x\cap I_y\neq\emptyset$

לכן, $I_x\cup I_y$ הינו קטע פתוח

וכן: $I_x, I_y\subseteq I_x\cup I_y\subseteq G$

ומההגדרה נקבל $I_x=I_y=I_x\cup I_y$

קיבלנו - $I_x=I_y$ או $I_x\cap I_y=\emptyset$

ולכן, G איחוד זר של קטעים פתוחים ב-$\mathbb{R}$

כלומר קיים אוסף $\mathcal{C}$ של קטעים זרים פתוחים כך ש $G=\bigcup_{I\in\mathcal{C}} I$

ונשאר להוכיח ש $\mathcal{C}$ בת"מ.

נשים לב: $\forall I\in\mathcal{C}: I\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$

לפי הצפיפות של $\mathbb{Q}$ ב-$\mathbb{R}$.

נוכל לבחור, לכל $I\in\mathcal{C}$ $x_I\in I\cap\mathbb{Q}$ מסוים.

מכאן נוכל לבנות מיפוי חח"ע ועל $\varphi:\mathcal{C}\to\{x_I: I\in\mathcal{C}\}$;

ע"י ההתאמה: $I\mapsto x_I$ כך

כמובן שהתמונה של φ מוכלת ב-$\mathbb{Q}$, ולכן בת"מ כנדרש.

הגדרה - $X\neq\emptyset$ קבוצה.

$P(X)$ - משפחת כל הקבוצות החלקיות שלה.

σ-אלגברה מעל X היא $S\subseteq P(X)$ המקיימת:

(1) $X\in S$

(2) $A^c\in S \Leftarrow A\in S$

(3) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in S \Leftarrow \{A_n\}_{\mathbb{N}}\subseteq S$

סגורות לגבי המשלים והאיחוד המנוי

ומשפחה $S\subseteq P(X)$ שעבורה (3) מוחלפת בתכונה של סגירות לגבי איחודים סופיים

נקראת אלגברה מעל X

תכונה - אם $\{A_\alpha\}_I$ משפחה של σ-אלגבראות אזי גם $\bigcap_I A_\alpha$ σ-אלגברה.

אם $E\subseteq P(X)$ ו- $\{E_\alpha\}_I$ משפחה של σ-אלגבראות על X המכילות את E

אזי $[E]=\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha$ היא ה-σ-אלגברה הנוצרת ע"י E

דוגמא חשובה - (X,τ) מ"ט: $[\tau]$ נקראת אלגברת בורל מעל X סימון: $\mathbb{B}_\tau(X)$

(כלומר σ-אלגברה שנוצרת על ידי טופולוגיה).

(X,S) נקרא מרחב מדיד.

האם איחוד של σ-אלג' הוא σ אלג'?

גרסא: מצאו קבוצה X וב σ אלג': S_1,S_2 כך ש $S_1\cup S_2$ אינה σ אלג'

פתרון: נגדיר $X=\{1,2,3\}$

$S_1=\{\{1\},\{2,3\},\emptyset,\{1,2,3\}\}$

$S_2=\{\{1,2\},\emptyset,\{3\},\{1,2,3\}\}$

קל לבדוק כי S_1,S_2 הינן σ אלג'

ואולם $S_1\cup S_2=\{\{1\},\{2,3\},\emptyset,\{1,2,3\},\{1,2\},\{3\}\}$

אינה σ אלג', שכן $\{1\}\cup\{3\}\notin S_1\cup S_2$

$\boxed{\text{לכן: איחוד σ אלג' אינו בהכרח σ אלג'.}}$

- איך מה לגבי סדרה עולה $S_1\subset S_2\subset\dots$ של σ אלג' של X? האם גם האיחוד שלהן יהיה σ אלג'?

פתרון – דוגמא נגדית: $X:=\{(x_1,x_2,\dots)\mid \forall i\ x_i\in\{0,1\}\}$

נגדיר S_1 להיות הσ אלג' שנוצרת מהקבוצה: $A_1=\{(1,x_2,x_3,\dots)\mid x_i\in\{0,1\}\ \forall i\neq 1\}$

S_2 " " " " מאיחוד:

$A_1\cup A_2:=\{(x_1,1,x_3,\dots)\mid x_i\in\{0,1\}\ \forall i\neq 2\}$

נמשיך באופן איטרטיבי ונגדיר את S_{n+1} להיות הσ אלג' שנוצרת ע"י $\bigcup_{k=1}^{n+1}A_k$. כאשר לכל k: $A_k=\{(x_1,x_2,\dots)\mid x_k=1,\ x_i\in\{0,1\}\ \forall i\neq k\}$

אינטואיטיבית – ניתן להבין זאת כך – הσ אלג' S_n ניתן להבדיל בין n האיברים הראשונים של הסדרה (האיברים של X)

ברור לפי הבניה ש- $S_1\subset S_2\subset\dots$

נגדיר $S=\bigcup_{\mathbb{N}} S_n$ ונוכיח כי S אינה σ אלג'

אם S σ אלג' אזי מהיותה σ אלג' (תכונות ②+③) נקבל שהיא סגורה לגבי חיתוך בן מנייה. כמו כן, מהבניה ברור כי לכל n $A_n\in S$, וכל אחד יחיד מ-$\mathcal{P}(X)$, ולכן החיתוך הבן מנייה של הקבוצות שמרכיבות את $\bigcup_{\mathbb{N}}A_n$ שייך ל $S=\bigcup_{i=1}^{\infty}S_n$, אולם החיתוך הזה הוא למעשה: $\{(1,1,\dots)\}$: קבוצה בת איבר יחיד מ-X, ואילו לכל n, כל קבוצה ב-S_n מכילה אינסוף איברים מ-X, לכן החיתוך לא שייך ל- $S=\bigcup_{\mathbb{N}}S_n$ ומכאן ש S אינה σ אלג'.

$\boxed{\text{לכן איחוד בן מנייה של סדרה עולה של σ אלג' אינו בהכרח σ אלג'}}$

X **תרגיל**: הראו כי הס אלג' הנוצרת ע"י הנקודונים ב $\mathbb{R}$ מוכלת ממש בסאלגברת בורל על $\mathbb{R}$

פתרון: נגדיר $S=\{A\subset\mathbb{R} \mid$ A ב"מ או A^c ב"מ $\}$

טענה - S σ אלג':

הוכחה - לפי ההגדרה:

1) אכן: $\mathbb{R}\in S \Leftarrow \emptyset\in S$.

2) אם $A\in S$, אזי אם $A=(A^c)^c$ ב"מ $\Leftarrow A^c\in S$

אם A^c ב"מ $\Leftarrow A^c\in S$

3) נניח $\{A_n\}_{\mathbb{N}}\subseteq S$ אז שני מקרים אפשריים:

א) כל ה A_n ב"מ ואז גם האיחוד $\bigcup_{\mathbb{N}} A_n$ ב"מ ולכן מיד ב S

ב) קיים $A_{n_0}\in\{A_n\}_{\mathbb{N}}$ שאינה ב"מ ואז $A_{n_0}^c$ ב"מ, ומתקיים:

$$\left(\bigcup_{\mathbb{N}} A_n\right)^c=\bigcap_{\mathbb{N}} A_n^c\subseteq A_{n_0}^c$$

ולכן $\left(\bigcup_{\mathbb{N}} A_n\right)^c$ ב"מ ושוב $\bigcup_{\mathbb{N}} A_n$ מיד ב S

מש"ל **טענה**.

כעת, נשים לב כי S מכילה את הנקודונים ב $\mathbb{R}$ ומכאן ש:

$$[\{x \mid x\in\mathbb{R}\}]\subseteq S$$

ברור כי $S\subset \mathbb{B}(\mathbb{R})$ כי קב' ב"מ היא איחוד של קב' סגורות.
לדוג': קטע פתוח אינו בS.

והוכחנו את הנדרש.

הגדרה: יהי X קב' ו-S σ אלג' מעל X. **מידה** (חיובית) על S

הינה פונקציה $\mu: S\Rightarrow[0,\infty]$

המקיימת: 1) $\mu(\emptyset)=0$ 2) אם $\{A_i\}_{\mathbb{N}}\subseteq S$ סדרת קבוצות **זרות בזוגות**

אזי $\mu\left(\bigcup_{\mathbb{N}} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$

(התכונה השניה נקראת σ **אדיטיביות**)

(X,S,μ) נקרא מרחב **מידה חיובית**

תרגיל: תהי S σ אלג' על X ותהא $B\in S$.

הוכיחו כי $S_B=\{E \mid E=A\cap B,\ A\in S\}$

הינה σ אלג' על B.

פתרון: נבדוק לפי הגד' σ אלג':

(1) $B = X\cap B \in S_B \Leftarrow X\in S$

(2) ומכאן $A^c\in S \Leftarrow \exists A\in S\ E=A\cap B \Leftarrow E\in S_B$

$S_B \ni A^c\cap B = B - E$

(3) $\forall n\ E_n = A_n\cap B : \exists \{A_n\}_{\mathbb{N}} \subseteq S \Leftarrow \{E_n\}_{\mathbb{N}} \subseteq S_B$

$\bigcup_{\mathbb{N}} E_n \in S_B \Leftarrow \bigcup_{\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{\mathbb{N}} A_n \cap B$ ומכאן $\bigcup_{\mathbb{N}} A_n \in S \Leftarrow$

וסיימנו.

תרגיל: הוכח כי אם (X,S,μ) מ"מ היא, ו- $B\in S$

ונגדיר $\nu(A)=\mu(A\cap B)\quad \forall A\in S$

אזי ν הינה מידה חיובית על S

פתרון: נבדוק לפי הגדר' המידה:

(1) $\nu(\emptyset)=\mu(\emptyset\cap B)=\mu(\emptyset)=0$

(2) $\nu(A)=\mu(A\cap B)\geq 0$

(3) נניח $\{E_n\}_{\mathbb{N}}$ סדרה של קב' זרות בזוגות מS אזי:

$\nu(\bigcup_{\mathbb{N}} E_n) = \mu((\bigcup_{\mathbb{N}} E_n)\cap B) = \mu(\bigcup_{\mathbb{N}} (E_n\cap B))$

מכיון ש E_n זרות בפרט $E_n\cap B$ זרות ומכיון ש μ מידה

$\nu(\bigcup_{\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n\cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$

מונוטוניות המידה: יהי (X,S,μ) מ"מ.

אזי אם $A,B\in S$ ו: $A\subseteq B$

אזי $\mu(A)\leq\mu(B)$

הוכחה: $B = A \uplus (B\cap A^c) \Leftarrow A\subseteq B$

$B\cap A^c\in S \Leftarrow A^c\in S \Leftarrow A\in S$

ולפי תכונת הס אדיטיביות ($\Leftarrow$ אדיטיביות סופית)

$\mu(B)=\mu(A)+\mu(B\cap A^c) \geq \mu(A)$

μ מידה חיובית