פתרון תרגיל בית 10

<u>שאלה 1</u>

א. נראה שהמשלים של $F\times G$ הינה קבוצה פתוחה.

$(F\times G)^C=((X\setminus F)\times Y)\bigcup(X\times(Y\setminus G))$ והיא פתוחה כאיחוד פתוחות (בסיסיות).

ב. יהיו X,Y מ"ט, $A\subseteq X, B\subseteq Y$. הוכיחו כי $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$.

בכיוון הראשון: $\supseteq$

$$(a,b)\in\overline{A}\times\overline{B}\Rightarrow a\in\overline{A}, b\in\overline{B}\Rightarrow$$

לכל $U\subseteq A, V\subseteq B$ סביבות של a,b, בהתאמה, מתקיים:

$U\bigcap A\neq\varnothing, V\bigcap B\neq\varnothing$.

מכאן רואים כי: $\varnothing\neq(U\bigcap A)\times(V\bigcap B)=(U\times V)\bigcap(A\times B)$. כלומר לכל $U\times V$ סביבה

בסיסית של (a,b) מתקיים $(U\times V)\bigcap(A\times B)\neq\varnothing$ ולכן $(a,b)\in\overline{A\times B}$.

הערה: $U\times V$ היא סביבה בסיסית, ובהגדרת הסגור מספיק "לרוץ" על כל הסביבות הבסיסיות.

בכיוון השני: $\subseteq$

על פי סעיף א', $\overline{A}\times\overline{B}$ סגורה וכמו כן מתקיים $A\times B\subseteq\overline{A}\times\overline{B}$ לכן $\overline{A\times B}\subseteq\overline{A}\times\overline{B}$.

<u>שאלה 2</u>

נניח ש X האוסדורף ונראה שהאלכסון Δ סגור ב $X\times X$. נניח בשלילה שקיים $(a,b)\in\overline{\Delta}$ כך ש $(a,b)\notin\Delta$. עפ"י הגדרת האלכסון נקבל $a\neq b\in X$. מכיוון ש X האוסדורף קיימות U,V סביבות זרות של a,b בהתאמה. אבל אז נקבל ש $U\times V$ סביבה של (a,b) ומתקיים $(U\times V)\cap\Delta=\varnothing$ (אחרת קיים $(x,x)\in U\times V$ ונקבל ש U,V אינן זרות) מכאן $(a,b)\notin\overline{\Delta}$ וזו כמובן סתירה להנחה.

הכיוון ההפוך: נניח בשלילה שהאלכסון Δ סגור ב $X\times X$ ו X אינו האוסדורף. אז קיימות $a\neq b\in X$ כך **שלכל** U,V סביבות פתוחות של a,b בהתאמה, $U\cap V\neq\varnothing$. אך אז נקבל שלכל סביבה בסיסית $U\times V$ של (a,b) (הכוונה לקבוצה בבסיס של טופולוגית המכפלה) מתקיים $(U\times V)\cap\Delta\neq\varnothing$ (מדוע?) וזה מראה כי $(a,b)\in\overline{\Delta}$ (הראינו שבהגדרה של סגור מספיק לבדוק סביבות בסיסיות) למרות ש $(a,b)\notin\Delta$ וזו סתירה לכך שהאלכסון Δ סגור.

<u>הערה</u>

ניתן לפתור את התרגיל בדרך נוספת:
במקום להשתמש במושג הסגור, ניתן לעבור למשלים ואז להפעיל את הלמה השימושית שהוכחתם בהרצאה.

שאלה 3

א. עלינו להוכיח שני תנאים:

1. f על – נובע מכך שפונקצית הזהות היא על.

2. $U \subseteq Y$ פתוחה $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U) \subseteq X$ פתוחה. כיוון $\Leftarrow$ ברור מרציפותה של f. נוכיח את הכיוון השני. תהי $f^{-1}(U)$ פתוחה ב- X. בשל רציפות g, $g^{-1}\left(f^{-1}(U)\right)$ פתוחה ב- Y. מאידך $(f \circ g)^{-1}(U) = Id^{-1}(U) = U$. והוכחנו הדרוש!

ב. $\Leftarrow$ מיידי מהגדרת הומיאומורפיזם.

$\Rightarrow$ מספיק להוכיח כי ההעתקה פתוחה (רציפות ועל נובעות מכך ש f היא העתקת מנה, חח"ע נתונה).

תהי $V \subseteq X$ פתוחה. $V = f^{-1}\left(f(V)\right)$ (כי f חח"ע), מכיוון ש $f^{-1}\left(f(V)\right)$ פתוחה ב - X נקבל ע"פ הגדרת העתקת מנה ש- $f(V)$ פתוחה ב- Y.

שאלה 4

א. נגדיר $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x,y)=x+y^2$.מתקיים

$$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2) \Leftrightarrow f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$$

לכן $\hat{f}:\mathbb{R}^2/\sim \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\hat{f}\left[(x,y)\right]=f(x,y)$ מוגדרת היטב וחח"ע; ומכיוון ש f רציפה כך גם $\hat{f}$.

נראה ש $\left(\hat{f}\right)^{-1}$ רציפה:

תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2/\sim$ מוגדרת ע"י $g(x)=\left[(x,0)\right]$ אזי $g=\rho\circ h$ באשר $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ h(x)=(x,0)$ ולכן g רציפה כהרכבת רציפות (h רציפה שכן היא רציפה רכיב רכיב. ברכיב הראשון מדובר בפונקצית הזהות מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$ ובשני בפונקציה קבועה). נותר להוכיח כי $g=\left(\hat{f}\right)^{-1}$. $g\circ\hat{f}\left[(x,y)\right]=g(x+y^2)=\left[(x+y^2,0)\right]=\left[(x,y)\right]$ לכן ההרכבה של $g\circ\hat{f}$ היא הזהות ($id_{\mathbb{R}^2/\sim}$). ניתן להראות שההרכבה בכיוון השני נותנת גם את הזהות ($id_{\mathbb{R}}$)

ומכאן $g=\left(\hat{f}\right)^{-1}$ רציפה וקיבלנו בסה"כ ש $\mathbb{R}^2/\sim$ הומיאומורפי ל $\mathbb{R}$.

ב. נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\left[0,\infty\right)$ ע"י $f(x,y)=x^2+y^2$. (שימו לב f על $\left(\left[0,\infty\right)\right)$ בדיוק כמו בסעיף א מסיקים ש $\hat{f}$ מוגדרת היטב חח"ע ורציפה וגם כאן אם נגדיר $g:\left[0,\infty\right)\to\mathbb{R}^2/\sim$ ע"י $g(x)=\left[\left(\sqrt{x},0\right)\right]$ בדומה לסעיף א' ניתן לבדוק ולראות ש $g=\left(\hat{f}\right)^{-1}$ (בדקו הרכבה בשני הכיוונים ותקבלו פונקציות זהות). כעת מספיק להוכיח ש g רציפה ואמנם $g=\rho\circ t\circ r$ באשר $\begin{array}{l} r:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ r(x)=\sqrt{x} \\ t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, t(x)=\left(x,0\right)\end{array}$ ולכן g רציפה כהרכבת רציפות וקיבלנו בסה"כ ש $\mathbb{R}^2/\sim,\left[0,\infty\right)$ הומיאומורפיים.

<u>שאלה 5</u>

א. במרחב מטריזבילי כל נקודון סגור. עם זאת במרחב שרפינסקי $\{0\}$ אינו סגור (כי $\{1\}$ אינו פתוח).

ב. נתבונן בתרשים הבא:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f} & \{0,1\} \\ \rho\searrow & & \nearrow\hat{f} \\ & I/\sim & \end{array}$$

נשים לב כי $\hat{f}$ מוגדרת היטב וחח"ע שכן $f(a)=f(b)\Leftrightarrow a\sim b$. כעת, נראה ש- f מנה ולכן גם $\hat{f}$ תהיה מנה (ולכן, מכיוון שהיא חח"ע, היא תהיה הומיאומורפיזם).

ראשית ברור ש f על.

כעת, תהי $U\subseteq\{0,1\}$. נניח ש- $f^{-1}\left(U\right)$ פתוחה ונראה ש- U פתוחה. מספיק להראות ש- $U\neq\{1\}$. נניח בשלילה כי $U=\{1\}$, אזי $f^{-1}\left(U\right)=f^{-1}\left(\{1\}\right)=\left[\frac{1}{2},1\right]$ וזאת סתירה שכן $\left[\frac{1}{2},1\right]$ אינה פתוחה ב- I. לכן $U\in\tau$.

בכיוון ההפוך: נניח ש $U \subseteq \{0,1\}$ פתוחה ונראה ש $f^{-1}(U)$ פתוחה ב I. אם $U=\varnothing$ נקבל ש $f^{-1}(U)=\varnothing$. אם $U=X$ נקבל ש $f^{-1}(U)=I$. לבסוף אם $U=\{0\}$ נקבל ש $f^{-1}(U)=\left[0,\frac{1}{2}\right)$. קיבלנו שלכל $U\in\tau$ $f^{-1}(U)$ פתוחה ב I. מכאן, בסה"כ f מנה.

לכן $\hat{f}$ מנה ומכיון שהיא גם חח"ע נקבל ש $\hat{f}$ הומיאומורפיזם.

ג. I מטריזבילי, ואילו $I/\sim$ אינו מטריזבילי (עיינו בסעיף א').

<u>שאלה 6</u>

המועמד הטבעי $f(x)=|x|$.

מתקיים $x\sim y \Leftrightarrow (x=y)\vee(x=-y) \Leftrightarrow |x|=|y| \Leftrightarrow f(x)=f(y)$ ולכן $\hat{f}$ מוגדרת היטב וחח"ע.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "f=\hat{f}\circ\rho"] \arrow[dr, "\rho"'] & & {[0,\infty)} \\ & \mathbb{R}/\sim \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}.$$

f רציפה ולכן $\hat{f}$ רציפה.

נמצא את הפונקציה ההופכית של $\hat{f}$. נגדיר: $g:[0,\infty)\to \mathbb{R}/\sim$ ע"י: $g(x)=[x]$.

לכל $x\in[0,\infty)$ מתקיים:

$$\hat{f}\circ g(x)=\hat{f}([x])=f(x)=|x|\underset{x\geq 0}{=}x$$

מצד שני לכל $[x]\in \mathbb{R}/\sim$ מתקיים $g\circ\hat{f}([x])=g(f(x))=g(|x|)=[|x|]\underset{x\sim|x|}{=}[x]$.

לכן g היא הפונקיצה ההופכית של $\hat{f}$. קל לראות ש $g=\rho|_{[0,\infty)}$ ומכיון ש ρ רציפה אז גם g.

בסה"כ $\hat{f}$ רציפה הפיכה ו $\left(\hat{f}\right)^{-1}$ הפיכה לכן $\hat{f}$ הומיאו'.

<u>בונוס</u>

הפונקציה $I\xrightarrow{f}\{0,1\}$ משאלה 5 היא מנה (ראו פתרון שאלה 5). נראה שאינה פתוחה ואינה סגורה.

אינה פתוחה: $\left(\frac{3}{4},1\right]$ פתוחה ב I וגם $f\left(\left(\frac{3}{4},1\right]\right)=\{1\}\notin\tau$.

אינה סגורה: $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ סגורה ב I וגם $f\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\right)=\{0\}$ שאינה סגורה ב(X,τ) .