לינארית - תרגיל 5

שאלה 1

א.

$$\begin{vmatrix} 14 & 27 & 35 \\ 22 & 11 & 19 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 22 & 11 & 19 \\ 14 & 27 & 35 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 11 & 19 \\ 27 & 35 \end{vmatrix}$$

$$= 4\cdot(11\cdot 35 - 19\cdot 27) = \boxed{-512}$$

ב.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{vmatrix} = -\left(a \begin{vmatrix} b & a \\ a & c \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} c & a \\ b & c \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} c & b \\ b & a \end{vmatrix} \right) = -a(bc-a^2)+c(c^2-ab)-b(ac-b^2)$$

$$= a^3+b^3+c^3-3abc$$

המטריצה הפיכה $\Longleftrightarrow$ $a^3+b^3+c^2-3abc \neq 0$.

ג.

$$\begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & \cdots & n \\ n & 2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & n-1 & \vdots \\ n & n & \cdots & \cdots & n \end{vmatrix} \xrightarrow[R_i \leftarrow R_i - R_n]{\forall 1\le i\le n-1:} \begin{vmatrix} (1-n) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & (2-n) & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & (n-1)-n & 0 \\ n & n & \cdots & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= (1-n)(2-n)\cdot \ldots \cdot((n-1)-n)\cdot n = (-1)^{n-1}\cdot (n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 1\cdot n$$

$$= (-1)^{n-1}\cdot n!$$

$\Leftarrow$ המטריצה הפיכה לכל n טבעי.

שאלה 2 ← (זה לא משנה כי: $|A|=|A^t|$)

א. נניח בה"כ שהשורה ה-i היא שורת אפסים. אזי:

$$\forall 1\le j\le n:\ a_{ij}=0$$

[פיתוח לפי השורה ה-i ←]
$$|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=0$$

ב. נסמן:
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ a_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

אינדוקציה על סדר המטריצה.

בסיס: $n=1$: $|(a_{11})|=a_{11}$.

נניח נכונות עבור $n-1$ נוכיח עבור n.

$$|A|=a_{11}\cdot M_{11}=a_{11}\cdot(a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn})$$

לפי הנחת האינדוקציה
(M_{11} משולשית תחתונה מסדר $n-1$).

הערה: הוכחנו עבור משולשית תחתונה, אבל $|A|=|A^t|$ ו-A^t משולשית עליונה.

שאלה 3

א. באינדוקציה על k.

בסיס $k=1$: $|A|=|A|$

נניח נכונות עבור $k-1$ נוכיח עבור k.

$$|A|^k = |A|^{k-1}\cdot|A| \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} |A^{k-1}||A| = |A^k|$$

ב. $|A^{-1}\cdot A| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}||A| = 1$

$\Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$ (A הפיכה $\Leftarrow$ $|A| \neq 0$)

ג. $$|A^{-k}| = |(A^{-1})^k| \underset{\text{סעיף א'}}{=} |A^{-1}|^k \underset{\text{סעיף ב'}}{=} (|A|^{-1})^k = |A|^{-k}$$

שאלה 4

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a(a^2-1) - (a-1) + (1-a)$$

$$= a(a-1)(a+1) - (a-1) - (a-1)$$

$$= (a-1)(a^2+a-2)$$

$$= (a-1)(a^2-a+2a-2)$$

$$= (a-1)[a(a-1)+2(a-1)]$$

$$= (a-1)^2(a+2)$$

למע' קיים פתרון יחיד $\Leftrightarrow$ הדטרמיננטה $\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $a\neq 1 \wedge a\neq -2$

עבור $a=-2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow -\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3-R_1]{R_2 \leftarrow R_2-R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 0 & 1\frac{1}{2} & -1\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

לא ייתכן $\Rightarrow$ אין פתרון.

עבור $a=1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$ אינסוף פתרונות.

שאלה 5

א. $AA^t = I \Rightarrow |A||A^t| = |I| = 1 \Rightarrow |A||A| = 1$
$\Rightarrow |A| = \pm 1$

ב. נניח ש-A סינגולרית (ולכן: $|A| = 0$)
נניח בשלילה ש-A רגולרית $\Rightarrow$ קיימת מטריצה A^{-1} כך ש- $AA^{-1} = I$
עפ"י הנתון: $A^2 = A \Rightarrow A^2A^{-1} = AA^{-1} \Rightarrow A = I$ בסתירה לנתון.

ג. תהי A מטריצה מסדר n. (נסמן:)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

עפ"י הנתון: $\forall 1 \le i \le n: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$

אם נחבר לעמודה הראשונה את יתר העמודות נקבל (בעמודה הראשונה)

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$$

A סינגולרית
$\Leftarrow |A| = 0$.