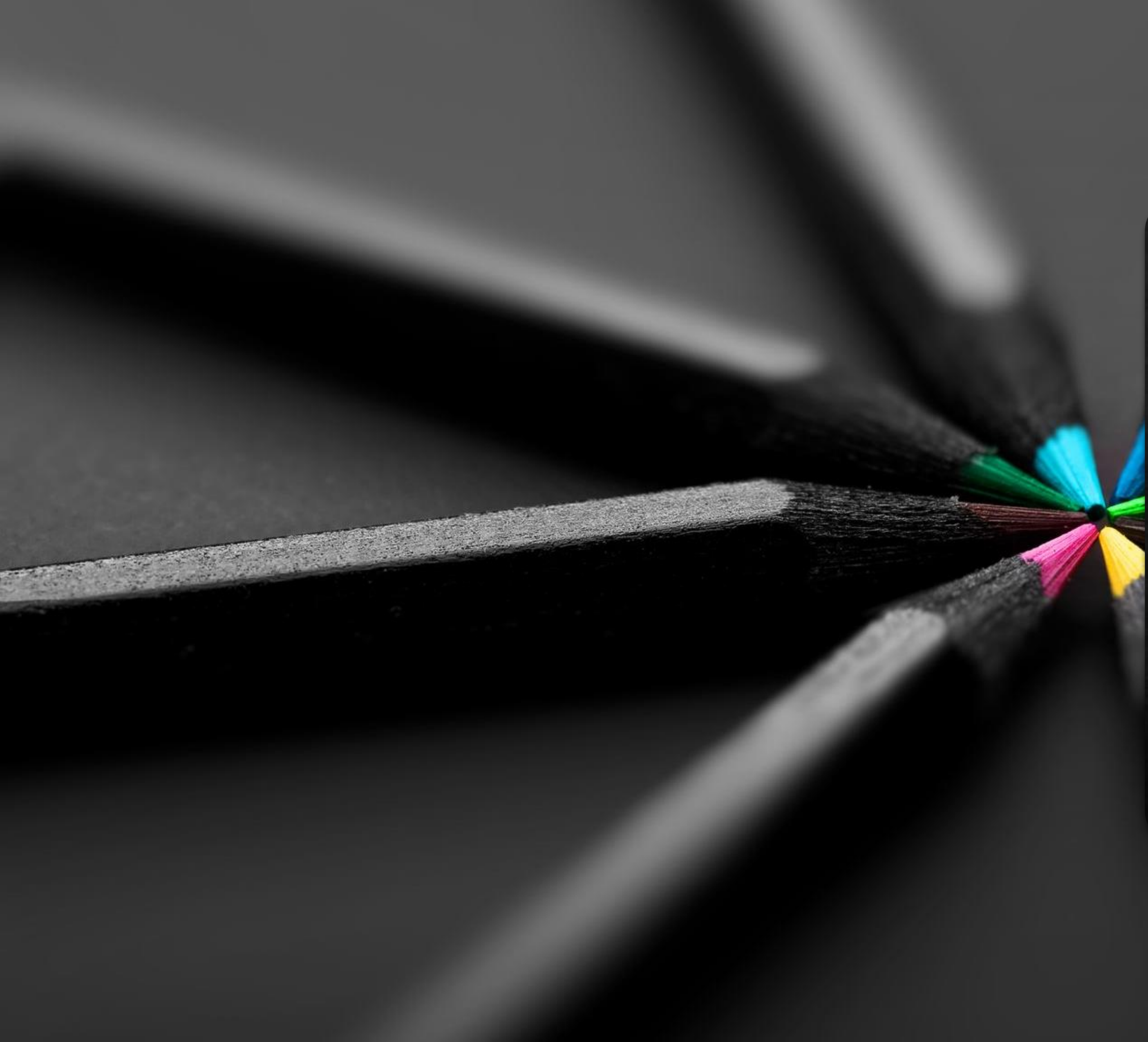

תרגול 8- אושרית

מרחבי המטריצה, דרגת המטריצה, קשר בין דרגת המטריצה למספר הפתרונות למערכת משוואות לינארית, העתקות לינאריות

חומר לבוחן: עד תלות ופרישה כולל

הבוחן יתנהל במתכונת דומה לבוחן בבדידה

מרחבי המטריצות:

יהא $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מגדירים 4 מרחבים עיקריים:

1) **מרחב העמודות של A:** המרחב הנפרש ע"י עמודות המטריצה A

$$C(A)=span\{C_1(A),\dots,C_n(A)\}\le\mathbb{F}^m$$

2) **מרחב השורות של A:** המרחב הנפרש ע"י שורות המטריצה A.

$$R(A)=span\{R_1(A),\dots,R_m(A)\}=C(A^t)\le\mathbb{F}^n$$

3) **מרחב האפס של A:** מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית ש-A מטריצת המקדמים שלה

$$N(A)=\{x\in\mathbb{F}^n\mid Ax=0\}\le\mathbb{F}^n$$

4) **מרחב האפס השמאלי של A:** מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A^tx=0$

$$N(A^t)=\{x\in\mathbb{F}^m\mid A^t\cdot x=0\}\le\mathbb{F}^m$$

פחות שימושי...

ג3:

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$C(A)=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$R(A)=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$N(A)=\left\{\begin{pmatrix}0\\t\\0\end{pmatrix}\middle|\, t\in R\right\}$$

נציב t כי y משתנה חופשי. $y=t$ $x=0$ $z=0$

$$N(A^t)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$$

מציאת מרחב שורות:

תרגיל: מצא $R(A)=?$ $\quad A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\1&3&3&5\end{pmatrix}$

פתרון: דבר ראשון - נדרג את המטריצה A.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\1&3&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

מרחב השורות של A שווה למרחב השורות של A לאחר דירוג (מוכיחים בהרצאה)

$$R(A)=sp\{\underbrace{(1,2,3,4),(0,1,0,1)}_{\text{[illegible]}}\}=\left\{\begin{pmatrix}a\\2a+b\\3a\\4a+b\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

ואם מעוניינים בהצגה מפורשת

אלגוריתם: (1) מדרגים את המטריצה

(2) השורות השונות מ-0 מהוות בסיס למרחב השורות

השלמת קבוצת וקטורים לבסיס:

דוגמה: השלם את הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$ לבסיס ל- $\mathbb{R}^4$.

פתרון:

שלב א': נשים את הוקטורים כשורות של מטריצה ונדרג

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&1&1&3\\1&1&1&2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\underline{1}&0&1&1\\0&\underline{1}&-1&1\\0&0&\underline{1}&0\end{pmatrix}$$

מדורגת-ראשית כי - אין שורת אפסים ולכן בת"ל

שלב ב': $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ ברור ולכן - חסר לנו וקטור אחד לבסיס שלנו.

איך - איך מוסיפים אותו - קל לראות שחסר לנו איבר מוביל בעמודה 4 ולכן נוסיף איבר מוביל באופן הבא: $(0\ 0\ 0\ 1)$

$$\Leftarrow \boxed{\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \text{ בסיס ל- } \mathbb{R}^4.}$$

מרחב העמודות:

איך מוצאים את מרחב העמודות של מטריצה A.

(אין צורך באלגוריתם, דרך דוגמה:) תהי:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\1&3&3&5\end{pmatrix}$$

שלב א: מדרגים את המטריצה A.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\1&3&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(שורות)}]{\text{מדרגים}}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

שלב ב: מרחב העמודות נפרש ע״י העמודות במטריצה המקורית A לפני דירוג שמתאימות לעמודות ציר במטריצה המדורגת.

$\Leftarrow$ עמודות 2,1 הן עמודות ציר

$\Leftarrow$
$$\boxed{C(A)=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\}}$$

משפט (ללא הוכחה): $\dim(R(A)) = \dim(C(A))$

הגדרה: הדרגה של A, $\operatorname{rank}(A) = \dim(R(A))$

- לכן יש גם המון משמעויות (ראינו לאורך הסמסטר), נקבל כי כל ההגדרות שוות.

1. דרגת המטריצה
2. מימד מרחב העמודות
3. מימד מרחב השורות
4. מס' השורות השונות מ-0 במדורגת הקנונית
5. מס' האיברים המובילים
6. מס' עמודות הציר
7. מס' המשתנים התלויים.

משפט: $\operatorname{rank}(A) + \dim N(A) = n$ עבור $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$

מרחב האפס:

הערה: דרוש לבן מתלקו את מרחב האפס.

בסיס ומימד

תרגיל: מצא את ~~את~~ מרחב האפס של A

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\1&3&3&5\end{pmatrix}$$

פתרון:

חלק א: מדרגים את A.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\1&3&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[(\text{פיצ})]{\text{דירוג}}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x&y&z&w\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

~~לאמשוואות~~

חלק ב: מוצאים פתרון כללי למערכת

משתנים חופשיים: $w=s$, $z=t$

$$y+s=0$$

$$\boxed{y=-s}$$

~~$x+3z$~~

$$x+3t+2s=0 \Rightarrow \boxed{x=-3t-2s}$$

$$N(A)=\left\{\begin{pmatrix}-2s-3t\\-s\\t\\s\end{pmatrix}\middle|\ t,s\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

תרגיל:

תהא A ריבועית מסדר n, כך ש- $A^2=0$. הוכ' ש- $rank(A)\le n/2$

פתרון: נתון ש- $A^2=0$ נקבל כי: כל עמודה של A נמצאת במרחב האפס של A

ולכן - $C(A)\subseteq N(A)$ $\Leftarrow$ $\dim(C(A))\le\dim(N(A))$ ★

תזכורת: $rank(A)=\dim(C(A))$

לפי משפט

$$2rank(A)=2\dim(C(A))\le\dim N(A)+\dim C(A)=n$$

נחלק ב-2 את 2 האגפים ונקבל

$$\boxed{rank(A)\le\frac{n}{2}}$$

לפי הגדרת דרגה

שימוש באי שוויון כוכב

הסבר:

$$0=A^2=A\begin{pmatrix}| & & |\\ c_1(A) & \cdots & c_n(A)\\ | & & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}| & & |\\ A\cdot c_1(A) & \cdots & A\cdot c_n(A)\\ | & & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}| & & |\\ 0 & \cdots & 0\\ | & & |\end{pmatrix}$$

לפי כפל עמודה עמודה

לכן -

$$\begin{cases}A\cdot c_1(A)=0\\ A\cdot c_2(A)=0\\ \vdots\\ A\cdot c_n(A)=0\end{cases}$$

$\Leftarrow$ $c_1(A),\dots,c_n(A)$ הם פתרוני של המשוואה ההומוגנית $Ax=0$

$\Leftarrow$ $c_1(A),\dots,c_n(A)\in N(A)$

תרגיל: יהיו $A,B\in F^{n\times n}$ כך ש- $rank(A)+rank(B)>n$ צ"ל: $AB\neq 0$

פתרון: (נניח) נב"ש כי- $AB=0$, כלומר לכל i מתקיים:

$$C_i(AB)=A\cdot\underbrace{C_i(B)}_{\text{פתרון של המערכת ההומוגנית}}=0$$

$$\Leftarrow \quad \forall i \quad C_i(B)\in N(A) \quad \underset{\text{הכלה}}{\overset{\text{לפי הג'}}{\Leftarrow}} \quad C(B)\subseteq N(A)$$

$$\Leftarrow \quad rank(B)=\dim(C(B))\leq \dim N(A)$$

לפי משפט שראינו קודם

$$n=rank(A)+\dim N(A)\geq rank(A)+rank(B)$$

מסקנה לא נכון ש- $rank(A)+rank(B)>n$

משפט מההרצאה:

$$\text{rank}(AB) \le \text{rank}(A), \text{rank}(B)$$

תרגיל:

נתון $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times p}$

צ"ל - אם עמודות AB בת"ל $\Leftarrow$ עמודות B בת"ל.

$\underbrace{A}_{m\times n}\underbrace{B}_{n\times p}$

$m\times p$

פתרון: עמודות AB בת"ל ולכן - $\text{rank}(AB)=p$

$$p = \text{rank}(AB) \le , \text{rank}(B) \le \underbrace{p}_{\text{מס'}}$$

לפי משפט מההרצאה

העמודות של p.

$\Leftarrow$ עמודות B בת"ל. מש"ל

תרגיל: תהא - $A=\begin{pmatrix}1&1&*\\1&*&1\\*&1&*\end{pmatrix}$ נניח כי למערכת $Ax=0$ יש 2 פתרונות בת"ל

צ"ל: $A=?$

פתרון: מהנתון נקבל כי $\dim(N(A))\geq 2$ אבל - $A\neq 0$ וגם - $\dim(N(A))\neq 3$ ⇐ $\dim N(A)=2$

לפי משפט הדרגה נקבל כי $\underbrace{\dim N(A)}_{2}+\text{rank}(A)=3$ ⇐ $\text{rank}(A)=1$

⇐ כל העמודות תלויות בעמודה הראשונה

$$\begin{pmatrix}1\\1\\*\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\*\\1\end{pmatrix}$$

נקבל - לגבי שאר ה-*

$\boxed{1=\alpha}$

$\boxed{1=*}$

$\boxed{*=1}$

⇐ נקבל כי $\boxed{A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}}$

העתקות לינאריות: (העל"ל)

הג': יהיו V,W מ"ו מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. העל"ל (היא) פונק' $T: V \to W$ אם:

1. משמרת חיבור - $\forall v_1,v_2 \in V : T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$
2. משמרת כפל בסקלר - $\forall \alpha \in \mathbb{F}, v \in V : T(\alpha v)=\alpha T(v)$

או - איחוד של 1 ו-2 ! $T(\alpha v_1+v_2)=\alpha Tv_1+Tv_2$

תכונות בסיסיות של העל"ל:

1. $T(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots+\alpha_n v_n)=\alpha_1 Tv_1+\dots+\alpha_n Tv_n$
2. $T(0_v)=0_w$

דוג': קבעו - (האם) העל"ל?

א. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad T(x)=x+1$

תשובה:

$\boxed{\text{לא}}$

$T(0)=0+1=1 \neq 0$

2) $T: \mathbb{F}^{n\times m} \to \mathbb{F}$ המוגדרת ע"י $T(A)=tr(A)$ $\boxed{\text{כן}}$

הוכחה: נראה שמתקיימת חיבור וכפל בסקלר - יהיו $A,B\in \mathbb{F}^{n\times m}$ ויהי $\alpha\in \mathbb{F}$

$$T(\alpha A+B) = tr(\alpha A+B) \underset{\text{לפי תכונות של } tr}{=} \alpha\, tr(A)+tr(B) = \alpha T(A)+T(B)$$

3) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2\\b\end{pmatrix}$ $\boxed{\text{לא}}$

לא מתקיימת כפל בסקלר -

$$f\left(3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$3f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

4) $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$

$\boxed{\text{ט}}$ $T(p(x)) = p'(x)$

הוכחה: מכבדת חיבור וכפל בסקלר -

$$T(\alpha p(x) + h(x)) = (\alpha p(x) + h(x))' = \alpha \cdot p'(x) + h'(x) = \alpha \cdot T(p(x)) + T(h(x))$$

דוג' סטנדרטית (לא הוכחה): העתקת הזהות והעתקת האפס.

משפט ההגדרה: יהיו V,W שני מ"ו מעל $\mathbb{F}$, יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל-V, ויהיו $w_1,\dots,w_n\in W$ וקטורים כלשהם, אזי - קיימת העתקה יחידה $T:V\to W$ כך ש- $\forall i:\ T(v_i)=w_i$

משמעות: כדי להגדיר העתקה מספיק לקבוע לאן ישלחו איברי הבסיס.

דוגמה: $V=\mathbb{R}_2[x]$ נגדיר את ההעתקה $T:V\to V$ המקיימת

$$T(1)=x+2$$
$$T(x)=1$$
$$T(x^2)=-2x+1$$

נמצא את ההעתקה המפורשת

פתרון: כלומר

$$T(a+bx+cx^2)=?$$

$$T(a+bx+cx^2)=aT(1)+bT(x)+cT(x^2)=a(x+2)+b\cdot 1+c(-2x+1)=$$
$$=ax+2a+b-2cx-c=(a-2c)x+2a+b-c$$

בהצלחה!!!