מבחן לינארית 1 קיץ תשפ"ד מועד א'

29.8.2024

מרצים: גיא בלשר, דניס גולקו, עוזי חרוש, ארז שיינר.
מתרגלים: עידו גולדנברג, רועי חסון, שירה ידעי, יונתן סמידוברסקי, עידו פלדמן, עידו קצב, ירדן שני.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך המבחן: שלוש שעות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי – מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- יש לכתוב בכל תשובה פתרון מלא ומפורט.
- הניקוד לכל שאלה כתוב בתחילתה, והוא מתחלק באופן שווה בין הסעיפים.
- סך הנקודות במבחן הוא 109. ציון מעל 100 יעוגל ל-100.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

שאלה 1. (10 נק' לכל סעיף) יהי $a \in \mathbb{C}$ פרמטר. נתבונן במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & a^2 \\ -1 & a^2 & -a^2-a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

ובקבוצה

$$U = \left\{ v \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, Av = A^t v \right\}.$$

א. קבעו לכל ערך של a מהי הדרגה של המטריצה A.

ב. הוכיחו כי U הוא תת־מרחב של $\mathbb{C}^3$ (מעל השדה $\mathbb{C}$).

ג. עבור $a = i$, מצאו בסיס ומימד ל-U כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

שאלה 2. (8 נק' לכל סעיף)

א. קבעו כמה העתקות לינאריות $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ מקיימות את התנאים

$$T(1-x) = -1-x+x^2$$
$$T(1-x^2) = 1-x^2$$
$$T(1-2x+x^2) = -3-2x+3x^2$$

והוכיחו את תשובתכם.

ב. מצאו נוסחה מפורשת להעתקה $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ המקיימת את תנאי הסעיף הקודם וגם $T(1+x-x^2) = x$.
כלומר, עליכם למצוא את $T(a+bx+cx^2)$ לכל $a, b, c \in \mathbb{R}$.

ג. מצאו בסיס ומימד עבור $\ker T$ ו-$\operatorname{Im} T$ להעתקה שמצאתם בסעיף הקודם.

שאלה 3. (7 נק' לכל סעיף) יהי $n \geq 2$ מספר טבעי, ותהי $M \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה כלשהי. נגדיר תת־קבוצה U של $\mathbb{F}^{n\times n}$ לפי

$$U = \left\{ A \in \mathbb{F}^{n\times n} \,\middle|\, AM = A \right\}.$$

א. הוכיחו כי לכל $A \in U$ ולכל $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים $BA \in U$.

ב. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו כי $A \in U$ אם ורק אם $C(M-I) \subseteq N(A)$.

שאלה 4. (7 נק' לכל סעיף) יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית ממימד n מעל שדה $\mathbb{F}$. נניח כי $n \geq 2$.
נגדיר שתת־מרחב $U \leq V$ הוא **על־מישור** אם $\dim U = n-1$.

א. <u>הוכיחו או הפריכו:</u> אם $U_1, U_2 \leq V$ על־מישורים <u>שונים</u>, אז $\dim(U_1 \cap U_2) = n-2$.

ב. הוכיחו שאם $W \leq V$ הוא תת־מרחב כך ש-$\dim W = n-2$, אז קיימים על־מישורים $U_1, U_2 \leq V$ כך ש-$U_1 \cap U_2 = W$.

ג. נניח כי $n \geq 3$. <u>הוכיחו או הפריכו:</u> אם $U_1, U_2, U_3 \leq V$ על־מישורים <u>שונים</u>, אז $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = n-3$.

שאלה 5. (10 נק' לכל סעיף) יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$, ותהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית. לאורך השאלה נסמן $T^2 = T \circ T$.

א. נניח ש-$\dim V = 2$. הוכיחו כי $T^2 + I = 0$ אם ורק אם קיים בסיס סדור B של V שעבורו $[T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ב. נניח ש-$\dim V = 3$. הוכיחו כי לא ייתכן ש-$T^2 + I = 0$.
כלומר: עליכם להוכיח שאם $\dim V = 3$ אז לא קיימת העתקה לינארית $T\colon V \to V$ שעבורה $T^2 + I = 0$.