

שאלות חשיבה

שאלה 1. תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ (שימו לב שהיא ריבועית). הוכיחו: A הפיכה $\iff rank(A) = n \iff dim N(A) = 0$.
(זכרו שהראינו בעבר ש A הפיכה או"א קיים $b \in \mathbb{F}^n$ כך שקיים פתרון יחיד למערכת $A \cdot x = b$, או"א קיים פתרון יחיד למערכת $A \cdot x = 0$. השקילויות לעיל מתווספות לארסנל התנאים שלנו להפיכות מטריצה).

שאלה 2. הסיקו משאלה 1 את הטענה הבאה: תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$ ומתקיים $n < m$. הוכיחו שהמטריצה הריבועית $A \cdot A^t$ אינה הפיכה.

שאלה 3. הוכיחו את משפט הדרגה: תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. אזי:

$$rank(A) + dim N(A) = n$$

רמז: יהי $\{Av_1, Av_2, \dots, Av_t\}$ בסיס ל $C(A)$, ויהי $\{u_1, \dots, u_s\}$ בסיס ל $N(A)$. מה ניתן לומר על הקבוצה $\{u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t\}$?

שאלה 4. אם הצלחתם, נסו להוכיח את המשפט הכללי יותר הבא (גם כן נקרא "משפט הדרגה"): יהיו V, U מרחבים וקטוריים מעל שדה \mathbb{F} , ותהי $T : V \rightarrow U$ העתקה לינארית. אזי:

$$dim ker T + dim Im T = dim V$$

שאלה 5. יהי \mathbb{F}_p שדה עם p איברים. יהי V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F}_p ממימד n . מה הגודל של V ? כלומר, כמה איברים יש בו?