תרגיל בית 9 במבוא לתורת החבורות
סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. תהי G חבורה.

א. הוכיחו כי לכל $H \lhd G$, G פועלת ע"י הצמדה על H, וכי הפעולה לא בהכרח נאמנה.

ב. האם חֶזקה היא פעולה של $\mathbb{Z}$ על G (כאן G על תקן הקבוצה)? אם כן, האם היא נאמנה?

ג. הוכיחו שאם $G = S_4$, אז הפעולה (הרגילה) שלה על $F[x_1, x_2, x_3, x_4]$ אינה נאמנה (רמז: הוכח בעל-פה בתרגול).

שאלה 2. תהי G חבורה. נאמר כי $H, K \leq G$ הן תתי-חבורות צמודות אם קיים $g \in G$ כך ש- $gHg^{-1} = K$. הוכיחו:

א. לכל $g \in G$, $gHg^{-1} \leq G$, כלומר: הצמדה לת"ח אכן נותנת ת"ח.

ב. G פועלת על אוסף תתי החבורות שלה ע"י הצמדה. האם הפעולה בהכרח נאמנה?

ג. (רשות) הליבה של H: $\mathrm{Core}(H) := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ היא תת-החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של G שמוכלת ב-H (שימו לב שיש כאן כמה דברים להוכיח).
הערה: הליבה היא גרעין ההומומורפיזם המשמש להוכחת העידון של משפט קיילי.

שאלה 3. תהי G חבורה.

א. נתון שיש $g \in G$ שבמחלקת הצמידות שלו יש שני איברים בדיוק. הוכיחו כי יש ל-G ת"ח נורמלית לא טריוויאלית (רמז: ת"ח מאינדקס 2).

ב. הוכיחו שאם $|G| = 8$, אז יש ל-G ת"ח נורמלית לא טריוויאלית.

שאלה 4. תהי G חבורה פשוטה אינסופית. הוכיחו כי:

א. לכל $H \leq G$, מתקיים: $[G : H] = 1$ או $[G : H] = \infty$.

ב. G אינה אבלית (ניתן להוכיח אפילו שכל חבורה אבלית פשוטה היא ציקלית מסדר ראשוני, בפרט סופית).

ג. לכל איבר $e \neq g \in G$ יש אינסוף איברים צמודים.

ד. (רשות) הוכיחו שאם $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq \ldots$ שרשרת עולה של חבורות פשוטות ו-$G = \bigcup_i G_i$, אז G גם חבורה פשוטה.
זוהי למעשה דרך לייצר חבורה פשוטה אינסופית מחבורות פשוטות סופיות.
הערה: איחוד שרשרת עולה של חבורות (כלשהן) היא תמיד חבורה, זה לא טריוויאלי, מוזמנים להוכיח.

שאלה 5. תהי G חבורת-p סופית הפועלת על קבוצה X. הוכיחו שאם $p \nmid |X|$, אז קיימת ב-X נקודת שבת (כלומר: איבר $x \in X$ כך שלכל $g \in G$, $g * x = x$).
רמז: זו הכללה של תרגיל שפתרנו בתרגול, הרעיון זהה.

שאלה 6. נתבונן בתתי־חבורות סילו של S_n.

א. מצאו את הסדרים של כל תתי־חבורות סילו של S_5.

ב. יהי p ראשוני ותהי $P \leq S_p$ תת־חבורת p-סילו. הוכיחו כי P אבלית.

בהצלחה!