

תרגיל בית 11 במבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תשפ"ג

שאלה 1 (חימום). מבלי לעשות אף פעולת חיבור או כפל, הסבירו למה הקבוצה הבאה ב- \mathbb{Z}_2^4 אינה קוד לינארי:

$$\{(0110), (1001), (1010), (1100)\}$$

שאלה 2. נקודד את \mathbb{Z}_2^2 לקוד ב- \mathbb{Z}_2^8 לפי

$$\begin{array}{ll} (00) \mapsto (00000000) & (01) \mapsto (01010101) \\ (10) \mapsto (10101010) & (11) \mapsto (11111111) \end{array}$$

כלומר חזרנו ארבע פעמים על כל וקטור. קוד מסוג כזה נקרא קוד חזרה.

א. מצאו את המרחק המינימלי d_{\min} של הקוד.

ב. מצאו את המטריצה היוצרת התקנית G ואת מטריצת בדיקת הזוגיות הקנונית H של הקוד. ודאו קודם שאתם יודעים למה זה בכלל קוד לינארי.

שאלה 3. יהיו $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ שני קודים עם מרחקים מינימליים d_1, d_2 , בהתאמה.

א. מצאו דוגמה שבה $|C_1| = |C_2|$, אבל $d_2 < d_1$.

ב. הוכיחו שאם $C_1 \subseteq C_2$, אז $d_2 \leq d_1$.

שאלה 4. נתבונן במטריצה הבאה

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את d_{\min} של הקוד הלינארי C שמגדיר מרחב האפסים של H .

ב. בדקו האם המילים הבאות הן מילות קוד של C , ואם לא הניחו שאירעה שגיאה אחת ותקנו אותה:

$$v_1 = (0110100) \quad v_2 = (1000100) \quad v_3 = (1011100) \quad v_4 = (1010111)$$

שאלה 5. לכל זוג פולינומים $f(x), g(x)$ בצעו חלוקה אוקלידית של פולינומים ומצאו פולינומים $q(x), r(x)$ כך ש- $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ עם $\deg r(x) < \deg g(x)$.

א. בחוג $\mathbb{R}[x]$ $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2$, $g(x) = x^2 + x - 5$.

ב. בחוג $\mathbb{Z}_2[x]$ $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2$, $g(x) = x^2 + x - 5$.

שאלה 6. יהי $g(x) = x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$. נגדיר לפי קוד פולינומי C מ- \mathbb{Z}_2^6 ל- \mathbb{Z}_2^9 (כלומר כאן $n = 9$, $k = 6$, $m = 3$).

א. הוכיחו או הפריכו האם C הוא קוד ציקלי.

ב. קודדו את הוקטור $x = (101011)$ למילת קוד ב- C .

ג. בדקו מי מבין המילים הבאות היא מילת קוד של C :

$$v_1 = (101011110) \quad v_2 = (000101101) \quad v_3 = (110010110)$$

בהצלחה!