

מבחן בתורת גלואה מועד א 2016

ד"ר אליהו מצרי

יש לענות על כל 4 השאלות.

יש לנמק היטב כל טענה ומעבר שאתם עושים.

משך הבחינה: שעתיים וחצי (לאחר הארכה)

חומר עזר מותר: אין.

שאלה 1:

(א) הגדר מהי הרחבה פשוטה של שדות.
(ב) יהי F שדה אין סופי. הוכח כי כל הרחבה ספרבילית סופית של F היא הרחבה פשוטה.

שאלה 2:

יהי $p(x) = x^{64} - x$ פולינום מעל F_2 (שדה עם שני איברים).
מצא כמה פולינומים אי פריקים מכל דרגה משתתפים בפירוק של $p(x)$ לגורמים אי פריקים-נמקו היטב את תשובתכם.

שאלה 3:

יהי $p(x) = x^4 - 7$ פולינום מעל Q .
(א) מצא את שדה הפיצול, E , של $p(x)$ וחשב את $[E: Q]$.
(ב) חשב את $Gal(E/Q)$ ע"י מציאת יוצרים ויחסים (יש לפרט את פעולת היוצרים על שורשי הפולינום). מהי החבורה שקבלתם?
(ג) מצא 5 שדות ביניים $Q \subset K \subset E$. יש לתת יוצרים לכל תת שדה ומימד מעל Q .

שאלה 4:

תהי K הרחבת שדות ממימד p מעל השדה F_p (שדה עם p איברים) ותהי $G = \langle \sigma \rangle$ חבורת הגלואה של ההרחבה.
(א) חשבו על σ כעל אופרטור לנארי הפועל על K וחשבו את הפולינום האופייני שלו.
(ב) הוכיחו כי $\sigma - 1$ נילפוטנטי מסדר p ולכן לפי אלגברה לינארית קיים בסיס, B , של K כך שהמטריצה המייצגת $[\sigma - 1]_B$ בלוק ג'ורדן מסדר p .
(ג) השתמשו בסעיף ב על מנת למצוא את $[\sigma]_B$.
(ד) השתמשו בסעיף ג על מנת להוכיח שקיים $x \in K$ כך ש $\sigma(x) = x + 1$.

בהצלחה!