אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 2

19 בינואר 2019

1. רשמו את המספרים הבאים בצורה קרטזית $z = a + bi$:

א. $5\text{cis}135°$

ב. $\text{cis}\frac{\pi}{3}$

פתרון:

א. $z = 5\cos 135 + 5\sin 135 \cdot i = -2.5\sqrt{2} + 2.5\sqrt{2}i$.

ב. $z = \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} \cdot i = 0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2. רשמו את המספרים הבאים בצורה פולרית $z = r\text{cis}\theta$:

א. $-5i$

ב. $2 - 2i$

ג. 17.5

פתרון:

א. זהו מספר מדומה טהור, ולכן הוא נמצא על הציר המדומה (ציר ה־y) בחלקו התחתון. לכן מרחקו מהראשית הוא 5, והזוית עם הכיוון החיובי של הציר הממשי (ציר ה־x) היא $\frac{3\pi}{2} = 270°$. בסה"כ נקבל $z = 5\text{cis}\frac{3\pi}{2}$.

ב. נחשב את הנורמה: $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. והזוית: $\tan\theta = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow \theta = 135 \vee \theta = 315$, כיון שהמספר נמצא ברביע הרביעי נקבל $\theta = 315 = \frac{7\pi}{4}$.
בסה"כ: $z = 2\sqrt{2}\text{cis}\frac{7\pi}{4}$.

ג. זהו מספר ממשי, ולכן נמצא על הצירה הממשי (ציר ה־x). לכן מרחקו מהראשית הוא 17.5, והזוית היא 0. בסה"כ: $z = 17.5\text{cis}0$.

3. פתרו את המשוואות הבאות:

א. $z^3 = 6\text{cis}\frac{\pi}{5}$

ב. $(\overline{z})^4 = 2 + i$

ג. $z^3 \cdot (1 + i) = 2$

פתרון:

א. לפי המסקנה ממשפט דה־מואבר נקבל

$$z_k = \sqrt[3]{6}\text{cis}(\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi k}{3}), k \in \{0, 1, 2\}$$

כלומר, $z_0 = \sqrt[3]{6}\text{cis}\frac{\pi}{15}, z_1 = \sqrt[3]{6}\text{cis}\frac{11\pi}{15}, z_2 = \sqrt[3]{6}\text{cis}\frac{7\pi}{5}$.

ב. נצמיד את שני הצדדים: $\overline{(\overline{z})^4} = 2 - i$, ואז לפי כללי הצמוד נקבל:

$$z^4 = 2 - i = \sqrt{5}\text{cis}333.435$$

כעת נפעיל את דה־מואבר לקבל: $z_0 = \sqrt[8]{5}\text{cis}83.359, z_1 = \sqrt[8]{5}\text{cis}173.359, z_2 = \sqrt[8]{5}\text{cis}263.359, z_3 = \sqrt[8]{5}\text{cis}353.359$

ג. גם כאן צריך קצת משחק עד שרואים משוואה שאותה אנחנו יודעים לפתור עם דה־מואבר: $z^3\cdot(1+i) = 2 \Rightarrow z^3 = \frac{2}{1+i} = \frac{2}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{2-2i}{2} = 1-i = \sqrt{2}\text{cis}\frac{7\pi}{4}$.
ועכשיו לפי דה־מואבר נקבל: $z_0 = \sqrt[6]{2}\text{cis}\frac{7\pi}{12}, z_1 = \sqrt[6]{2}\text{cis}\frac{15\pi}{12}, z_2 = \sqrt[6]{2}\text{cis}\frac{23\pi}{12}$.

4. א. מצאו שני שורשי יחידה שונים מסדר 5, z, w, כך ש־ $z\cdot w = 1$.
ב. מצאו שלושה שורשי יחידה שונים מסדר 7, z, w, q, כך ש $z\cdot w\cdot q = 1$

<u>פתרון:</u>

א. כזכור, שורשי היחידה מסדר 5 הם המספרים: $\text{cis}\frac{2\pi k}{5}, k \in \{0,\dots 4\}$. ניקח $k_1 = 2, k_2 = 3$ ונקבל:

$$\text{cis}\frac{2\pi\cdot 2}{5}\cdot\text{cis}\frac{2\pi\cdot 3}{5} = \text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot 2}{5}+\frac{2\pi\cdot 3}{5}\right) = \text{cis}\frac{2\pi\cdot 5}{5} = \text{cis}2\pi = \text{cis}0 = 1$$

כאשר בשיוויון הראשון השתמשנו במשפט דה־מואבר.

ב. באותו רעיון שורשי היחידה מסדר 7 הם $\text{cis}\frac{2\pi k}{7}, k \in \{0,\dots 6\}$. ניקח $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 4$ ונקבל:

$$\text{cis}\frac{2\pi\cdot 1}{7}\cdot\text{cis}\frac{2\pi\cdot 2}{7}\cdot\text{cis}\frac{2\pi\cdot 4}{7} = \text{cis}\left(\frac{2\pi\cdot(1+2+4)}{7}\right) = \text{cis}2\pi = 1$$

5. הוכיחו: אם n זוגי אז מכפלת שורשי היחידה מסדר n היא -1: $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = -1$, ואם n אי זוגי אז המכפלה היא 1: $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = 1$. כאשר $z_k = \text{cis}\frac{2\pi k}{n}$.

<u>פתרון:</u>

נשים לב:

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \prod_{k=0}^{n-1}\text{cis}\frac{2\pi k}{n} = \text{cis}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\pi k}{n}\right) = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1} k\right)$$

כעת קיבלנו סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שבה הוא אפס, ולכן ניתן להתעלם ממנו. כלומר, $\sum_{k=0}^{n-1} k = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1+n-1}{2}\cdot(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. לכן נקבל:

$$\text{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right) = \text{cis}\left((n-1)\pi\right)$$

עכשיו הגיע הזמן לחלק בין הזוגיים לאי־זוגיים. אם n אי זוגי אז $n-1$ זוגי, ומספר זוגי של π זה בדיוק כמו זוית האפס (להזכירכם, כל פעמיים π זה סיבוב אחד וחוזרים שוב להתחלה), ולכן נקבל $\text{cis}0 = 1$. אם n זוגי אז $n-1$ אי זוגי ואז זה בדיוק כמו זוית $\pi = 180^\circ$ (כלומר, חצי סיבוב), ולכן נקבל $\text{cis}\pi = -1$.

בהצלחה!