גיאומטריה דיפרנציאלית: דף נוסחאות

גרסה 1.3, ינואר 2011

ברק שושני
baraksh@gmail.com | http://baraksh.co.il/

1 עקומות במישור

עקומה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ נקראת **רגולרית** אם הנגזרת שלה γ' שונה מאפס בכל נקודה, **פשוטה** אם היא חד־חד־ערכית (כלומר, לא חותכת את עצמה) **וסגורה** אם $\gamma(a) = \gamma(b)$.

1.1 אורך של עקומה

אורך העקומה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ניתן על־ידי האינטגרל:

$$L(\gamma) \equiv \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| \mathrm{d}t$$

פרמטריזציה טבעית: $\left\|\gamma'(s)\right\| = 1$ לכל s. למציאת הפרמטריזציה נחשב את האורך $s(t)$:

$$s(t) = \int_a^t \left\|\gamma'(x)\right\| \mathrm{d}x$$

ונהפוך את הפונקציה. **איזומטריה** היא העתקה $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ המקיימת לכל $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$:

$$d(\mathbf{p},\mathbf{q}) = d(\mathbf{F}(\mathbf{p}), \mathbf{F}(\mathbf{q}))$$

אם $\mathbf{F}$ חד־חד־ערכית ועל, ומקיימת $L(\gamma) = L(\mathbf{F} \circ \gamma)$ לכל עקומה γ, אז $\mathbf{F}$ איזומטריה.
אם לכל $\mathbf{x}$ היעקוביאן $\mathbf{J_F}(\mathbf{x})$ הוא מטריצה אורתוגונלית, אז $\mathbf{F}$ איזומטריה.

1.2 עקמומיות של עקומות במישור

משיק היחידה לעקומה בעלת פרמטריזציה טבעית הוא $\hat{\mathbf{T}}(s) \equiv \gamma'(s)$, ומתקיים $\left\|\hat{\mathbf{T}}(s)\right\| = 1$. **נורמל היחידה** לעקומה הוא וקטור יחידה שמאונך למשיק, כלומר $\left\langle \hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{N}} \right\rangle = 0$ ומתקיים $\left\|\hat{\mathbf{N}}(s)\right\| = 1$, והוא יוצר איתו בסיס אורתונורמלי בעל אוריינטציה חיובית, כלומר $\det\left(\hat{\mathbf{T}} \middle| \hat{\mathbf{N}}\right) = 1$. ניתן להגדיר את נורמל היחידה גם כך:

$$\hat{\mathbf{N}}(t) \equiv \frac{\mathbf{R}_{\pi/2}\gamma'(t)}{\left\|\gamma'(t)\right\|} = \frac{\left(-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t)\right)}{\left\|\gamma'(t)\right\|}$$

כאשר $\mathbf{R}_{\pi/2}$ היא מטריצת סיבוב בזווית $\frac{\pi}{2}$, ו־$\gamma' = (\gamma_1', \gamma_2')$.
משוואות פרנה הן:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{T}}' \\ \hat{\mathbf{N}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{T}} \\ \hat{\mathbf{N}} \end{pmatrix}$$

כאשר $k(s)$ היא **העקמומיות**. אם העקומה נתונה בפרמטריזציה טבעית:

$$k = \det\left(\gamma' | \gamma''\right), \qquad |k| = \left\|\gamma''\right\|$$

אם העקומה אינה נתונה בפרמטריזציה טבעית:

$$k = \frac{\det\left(\gamma' | \gamma''\right)}{\left\|\gamma'\right\|^3}$$

אם נסמן ב־$\alpha(s)$ את הזווית בין $\hat{\mathbf{T}}(s)$ לציר ה־x, אז העקמומיות תהיה $k(s) = \alpha'(s)$.
החלפת האוריינטציה במישור והחלפת סימן הפרמטר הטבעי $s \mapsto -s$ משנות את סימנה של העקמומיות, הזזת הפרמטר $s \mapsto s + s_0$ לא משנה את העקמומיות.
אם לעקומה יש עקמומיות קבועה, אז היא קו ישר כאשר $k(s) \equiv 0$ ומעגל מרדיוס $1/K$ כאשר $k(s) \equiv K > 0$.

1.3 רדיוס ומרכז עקמומיות, אינוולוט ואוולוט

רדיוס העקמומיות בכל נקודה הוא $R(t) = 1/\left|k(t)\right|$. **מרכז העקמומיות** הוא $\mathbf{c}(t) = \gamma(t) + R(t)\hat{\mathbf{N}}(t)$.
תהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ עקומה, יהיו $t_1, t_2 \in [a,b]$ ונסמן $\mathbf{l}_1(x) = \gamma(t_1) + x\hat{\mathbf{N}}(t_1)$, $\mathbf{l}_2(x) = \gamma(t_2) + x\hat{\mathbf{N}}(t_2)$. אם $\mathbf{p}(t_1,t_2)$ היא נקודת החיתוך של הישרים $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ אז:

$$\mathbf{p}(t_1,t_2) \xrightarrow[t_1,t_2 \to t]{} \mathbf{c}(t)$$

האינוולוט של עקומה $\gamma(t)$ מוגדר כך:

$$\mathbf{I}(t) \equiv \gamma(t) - s(t)\frac{\gamma'(t)}{\left\|\gamma'(t)\right\|}$$

האוולוט של עקומה $\gamma(t)$ הוא עקומה $\mathbf{E}(t)$ שהאינוולוט שלה הוא $\gamma(t)$. הוא מוגדר בפרמטריזציה טבעית כך:

$$\mathbf{E}(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s)$$

ובפרמטריזציה לא טבעית:

$$\mathbf{E}(t) = \gamma(t) + \frac{\left\|\gamma'(t)\right\|^2}{\det\left(\gamma'(t) | \gamma''(t)\right)}\left(-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t)\right)$$

העקומה $\mathbf{\Gamma}_s(t) = \gamma(t) + s\hat{\mathbf{N}}(t)$ מקבילה ל־γ במרחק s ממנה. לעקומה יש נקודות סינגולריות ($\left\|\mathbf{\Gamma}_s'(t)\right\| = 0$) אם ורק אם $s = R(t)$. הנקודות הסינגולריות הן על האוולוט.

1.4 עקמומיות כוללת, אינדקס ליפוף ועקומות קמורות

העקמומיות הכוללת של עקומה $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ בפרמטר טבעי היא:

$$k_{\text{total}} \equiv \int_0^L k(s)\,\mathrm{d}s$$

אינדקס הליפוף של עקומה סגורה γ סביב ראשית הצירים הוא:

$$i(\gamma) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^L k(s)\,\mathrm{d}s = \frac{\alpha(L) - \alpha(0)}{2\pi}$$

משפט הופף: לכל עקומה פשוטה וסגורה במישור יש אינדקס ליפוף ± 1.
עקומה נקראת **קמורה** אם היא נמצאת בצד אחד בלבד של המשיק בכל נקודה. עקומה פשוטה וסגורה היא קמורה אם ורק אם העקמומיות שלה אינה משנה סימן.
לכל עקומה במישור מתקיים:

$$\int_a^b k(t)\,\mathrm{d}t \geq 2\pi$$

כאשר שוויון מתקיים אם ורק אם העקומה קמורה.
האי־שוויון האיזופרימטרי: תהי γ עקומה פשוטה וסגורה בעלת עקמומיות חיובית בכל נקודה. אם L הוא אורך העקומה ו־A הוא השטח החסום ע"י העקומה אז $L^2 \geq 4\pi A$, כאשר שוויון מתקיים אם ורק אם העקומה היא מעגל.

1.5 משפט ארבעת הקודקודים

קודקוד של עקומה היא נקודה בה לעקמומיות יש מקסימום או מינימום מקומי. הקודקודים מתאימים לנקודות סינגולריות של מרכז העקמומיות $\mathbf{c}(t)$. לאליפסה יש ארבעה קודקודים בדיוק, אלא אם היא מעגל.
משפט ארבעת הקודקודים: לכל עקומה סגורה ופשוטה יש לפחות ארבעה קודקודים.

2 עקומות במרחב

2.1 משוואות פרנה, עקמומיות ופיתול

תהי $\gamma(s)$ עקומה בפרמטריזציה טבעית. **משוואות פרנה** הן:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{T}}' \\ \hat{\mathbf{N}}' \\ \hat{\mathbf{B}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{T}} \\ \hat{\mathbf{N}} \\ \hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix}$$

כאשר κ היא **העקמומיות**, τ הוא **הפיתול**, **משיק היחידה** $\hat{\mathbf{T}} \equiv \gamma'$ הוא וקטור יחידה שמשיק לעקומה, **נורמל היחידה**:

$$\hat{\mathbf{N}} \equiv \frac{\hat{\mathbf{T}}'}{\left\|\hat{\mathbf{T}}'\right\|} = \frac{\gamma''}{\left\|\gamma''\right\|}$$

הוא וקטור יחידה שמאונך לעקומה, **וקטור הבינורמל**:

$$\hat{\mathbf{B}} \equiv \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}} = \frac{\gamma' \times \gamma''}{\left\|\gamma''\right\|}$$

הוא וקטור יחידה שמאונך גם ל־$\hat{\mathbf{T}}$ וגם ל־$\hat{\mathbf{N}}$, ויוצר איתם בסיס אורתונורמלי חיובי, כלומר $\det\left(\hat{\mathbf{T}} \middle| \hat{\mathbf{N}} \middle| \hat{\mathbf{B}}\right) = 1$. בפרמטריזציה טבעית, העקמומיות והפיתול הן:

$$\kappa \equiv \left\|\gamma''\right\|, \qquad \tau \equiv \frac{\det\left(\gamma' | \gamma'' | \gamma'''\right)}{\kappa^2}$$

ובפרמטריזציה כללית:

$$\kappa = \frac{\left\|\gamma' \times \gamma''\right\|}{\left\|\gamma'\right\|^3}, \qquad \tau \equiv \frac{\det\left(\gamma' | \gamma'' | \gamma'''\right)}{\left\|\gamma' \times \gamma''\right\|^2}$$

ניתן להשתמש בזהות:

$$\det\left(\gamma' | \gamma'' | \gamma'''\right) = \left\langle \left(\gamma' \times \gamma''\right), \gamma''' \right\rangle$$

מטריצת גראם $\mathbf{G}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ היא המטריצה אשר מכילה בשורה ה־i ובעמודה ה־j את המכפלה הפנימית $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$. הדטרמיננטה של מטריצת גראם היא ריבוע נפח המקבילון שנוצר מהווקטורים $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. בשלושה מימדים מתקיים:

$$\left|\det\left(\mathbf{a} | \mathbf{b} | \mathbf{c}\right)\right| = \sqrt{\mathbf{G}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}$$

עקומה נקראת **סליל** אם המשיקים לעקומה נמצאים בזווית קבועה עם וקטור כיוון כלשהו, כלומר $\langle \gamma'(s), \mathbf{u} \rangle = \mathrm{const}$ לכל s עבור וקטור $\mathbf{u}$ כלשהו. אם לעקומה ישנן פונקציות עקמומיות ופיתול קבועות, אז היא בהכרח סליל.
המישור המשיק לעקומה γ בנקודה s_0 הוא:

$$\boldsymbol{\pi}(s_0) = \gamma(s_0) + \mathrm{Span}\left\{\gamma'(s_0), \gamma''(s_0)\right\}$$

אם $\kappa(s_0), \tau(s_0) \neq 0$ אז $\gamma(s)$ עוברת מצד אחד של $\boldsymbol{\pi}(s_0)$ לצידו השני כאשר $s = s_0$.
אם פונקציית הפיתול τ של עקומה היא קבועה ושווה לאפס, אז העקומה נמצאת במישור.
כאשר משנים את האוריינטציה במרחב, פונקציית הפיתול מחליפה סימן.
זהות שימושית עבור המכפלה הווקטורית היא: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{c}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

3 משטחים, חלק א'

3.1 מערכות קואורדינטות

הומאומורפיזם היא העתקה חח"ע, על, רציפה ובעלת פונקציה הפוכה רציפה. **מפת קואורדינטות** $\mathbf{x} : U \to V$ היא העתקה מקבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ לקבוצה פתוחה $V \subseteq \mathbb{R}^m$ שהיא **דיפאומורפיזם**, כלומר חד־חד־ערכית, על, חלקה (גזירה ברציפות אינסוף פעמים) ובעלת פונקציה הפוכה חלקה. ההעתקה היא **אימרסיה** אם הדיפרנציאל שלה חד־חד־ערכי, או באופן שקול, היעקוביאן שלה הוא מטריצה הפיכה.
קואורדינטות כדוריות מוגדרות כך:

$$\mathbf{x}(r,\theta,\phi) = \left(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta\right)$$

$$\mathbf{x}^{-1}(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \arccos\frac{z}{r}, \arctan\frac{y}{x}\right)$$

קואורדינטות גליליות מוגדרות כך:

$$\mathbf{x}(\rho,\phi,z) = \left(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z\right)$$

$$\mathbf{x}^{-1}(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}, z\right)$$

ההטלה הסטריאוגרפית $\mathbf{f} : \mathbb{S}^2(R) \to \{z = 0\}$ מהספירה ברדיוס R סביב הראשית אל המישור $\{z = 0\}$ היא:

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \frac{R}{R-z}(x,y)$$

$$\mathbf{f}^{-1}(u,v)\,\frac{R}{u^2+v^2+R^2}\left(2Ru, 2Rv, u^2+v^2-R^2\right)$$

3.2 התבנית היסודית הראשונה

פרמטריזציה של משטח דו־מימדי M היא מפת קואורדינטות $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M \subseteq \mathbb{R}^3$.
המישור המשיק למשטח M בנקודה $\mathbf{p}$, אשר יסומן $T_{\mathbf{p}}M$, הוא אוסף הווקטורים המשיקים של כל העקומות שעוברות דרך $\mathbf{p}$. כלומר, אם $\gamma(t)$ היא עקומה המקיימת $\gamma(0) = \mathbf{p}$ אז הווקטור המשיק $\mathbf{w} = \gamma'(\mathbf{p})$ יהיה ב־$T_{\mathbf{p}}M$. המישור המשיק נפרש ע"י הבסיס $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, כאשר:

$$\mathbf{x}_u \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \qquad \mathbf{x}_v \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$$

אם $\mathbf{f} : M \to N$ היא העתקה חלקה מהמשטח M למשטח N, אז **הדיפרנציאל** של $\mathbf{f}$ בנקודה $\mathbf{p} \in M$ הוא:

$$\mathrm{d}_{\mathbf{p}}\mathbf{f} : T_{\mathbf{p}}M \to T_{\mathbf{f}(\mathbf{p})}N$$

$$\mathrm{d}_{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{w}) = \mathrm{d}_{\mathbf{p}}\mathbf{f}\left(\gamma'(0)\right) = \left(\mathbf{f} \circ \gamma\right)'(0)$$

$$\mathrm{d}_{\mathbf{p}}\mathbf{f}(\mathbf{w}) = \mathbf{J_f}\mathbf{w}$$

העתקת גאוס $\hat{\mathbf{n}} : M \to \mathbb{S}^2$ (כאשר $\mathbb{S}^2$ היא ספירת היחידה) מתאימה לכל נקודה $\mathbf{p} = \mathbf{x}(\mathbf{u}) \in M$ על המשטח M את **נורמל היחידה** למישור המשיק $T_{\mathbf{p}}M$:

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}) \equiv \frac{\mathbf{n}(\mathbf{p})}{\left\|\mathbf{n}(\mathbf{p})\right\|} \equiv \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\left\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\right\|}$$

מטריקת רימן (התבנית היסודית הראשונה) של המשטח היא תבנית בילינארית סימטרית וחיובית ממש, אשר מוגדרת ביחס לבסיס $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ של המרחב המשיק כך:

$$g_{11} = \left\|\mathbf{x}_u\right\|^2, \quad g_{22} = \left\|\mathbf{x}_v\right\|^2, \quad g_{12} = g_{21} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle$$

$$\mathbf{G} = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \left\|\mathbf{x}_u\right\|^2 & \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle \\ \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle & \left\|\mathbf{x}_v\right\|^2 \end{pmatrix}$$

המטריקה מגדירה מכפלה פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ונורמה $\|\cdot\|$ על המרחב המשיק. לפיכך הזווית בין שני וקטורים במרחב המשיק היא:

$$\theta = \arccos\frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|}$$

והאורך של עקומה על המשטח הוא:

$$L(\gamma) = \int \left\|\gamma'(t)\right\| \mathrm{d}t$$

אלמנט אורך על המשטח הוא $\mathrm{d}s^2 = g_{11}\mathrm{d}u^2 + 2g_{12}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + g_{22}\,\mathrm{d}v^2$, **ואלמנט שטח** על המשטח הוא $\mathrm{d}A = \sqrt{\det \mathbf{G}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.
המטריקה האוקלידית היא המטריקה $\mathbf{G} = \mathbf{I}$ כאשר $\mathbf{I}$ מטריצת היחידה.

3.3 התבנית היסודית השנייה ואופרטור הצורה

אופרטור הצורה $\mathbf{S} : T_{\mathbf{p}}M \to T_{\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p})}\mathbb{S}^2 \cong T_{\mathbf{p}}M$ בנקודה $\mathbf{p}$ מוגדר על וקטור משיק $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ כך:

$$\mathbf{S}\mathbf{w} = -\mathrm{d}_{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{w})$$

אופרטור הצורה הוא **צמוד לעצמו:** $\langle \mathbf{S}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{S}\mathbf{y} \rangle$.
התבנית היסודית השנייה היא תבנית בילינארית אשר מוגדרת כך:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle \mathbf{S}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

ביחס לבסיס $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ של המרחב המשיק ניתן לייצג אותה באמצעות מטריצה:

$$b_{11} = \langle \mathbf{x}_{uu}, \hat{\mathbf{n}} \rangle, \quad b_{22} = \langle \mathbf{x}_{vv}, \hat{\mathbf{n}} \rangle, \quad b_{12} = b_{21} = \langle \mathbf{x}_{uv}, \hat{\mathbf{n}} \rangle$$

$$\mathbf{B} = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_{uu}, \hat{\mathbf{n}} \rangle & \langle \mathbf{x}_{uv}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \\ \langle \mathbf{x}_{uv}, \hat{\mathbf{n}} \rangle & \langle \mathbf{x}_{vv}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \end{pmatrix}$$

כאשר:

$$\mathbf{x}_{uu} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2}, \qquad \mathbf{x}_{vv} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v^2}, \qquad \mathbf{x}_{uv} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial v}$$

בנוסף מתקיים הקשר $\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}$.
וקטור $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$ יקרא **כיוון אסימפטוטי** אם $\mathbf{B}(\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0$.

3.4 עקמומיות של משטחים

ערכי העקמומיות הראשיים k_1, k_2 הם הערכים העצמיים של אופרטור הצורה $\mathbf{S}$, **והכיוונים הראשיים** הם הווקטורים העצמיים המתאימים, אשר מאונכים זה לזה. **קווי העקמומיות** הן עקומות שהווקטורים המשיקים להן הם כיוונים ראשיים. **נקודה אמבילית** היא נקודה $\mathbf{p}$ שערכי העקמומיות הראשיים בה שווים זה לזה.
עקמומיות גאוס מוגדרת כך:

$$K \equiv \det \mathbf{S} = \frac{\det \mathbf{B}}{\det \mathbf{G}} = k_1 k_2$$

העקמומיות הממוצעת מוגדרת כך:

$$H \equiv \frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathbf{S} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

משטח נקרא **משטח מינימלי** אם $H = 0$ בכל נקודה. אם משטח ב־$\mathbb{R}^3$ מקיים $H = K = 0$ בכל נקודה, אז הוא מישור.
כאשר מחליפים אוריינטציה של משטח n־מימדי, עקמומיות גאוס מוכפלת ב־$(-1)^n$ והעקמומיות הממוצעת משנה סימן.
נתונים שני משטחים, $\mathbf{x}$ ו־$\mathbf{y} = \mathbf{f} \circ \mathbf{x}$. אם $\mathbf{f}$ היא איזומטריה, כלומר $\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{b}$ כאשר $\mathbf{A}$ מטריצה אורתוגונלית, אז מתקיים $K_{\mathbf{y}} = (\det \mathbf{A})^n K_{\mathbf{x}},\ H_{\mathbf{y}} = \det \mathbf{A} \cdot H_{\mathbf{x}}$. אם $\mathbf{f}$ היא מתיחה, כלומר $\mathbf{f}(\mathbf{v}) = a\mathbf{v}$, אז $K_{\mathbf{y}} = \frac{1}{a^2}K_{\mathbf{x}},\ H_{\mathbf{y}} = \frac{1}{a}H_{\mathbf{x}}$.
פסבדו־ספירה מרדיוס R היא משטח בעל עקמומיות קבועה $-1/R^2$, באנלוגיה לספירה, שהיא משטח בעל עקמומיות קבועה $1/R^2$.

3.5 משטחי סיבוב

משטח הסיבוב של עקומה $\gamma(t) = (0, h(t), g(t))$ סביב ציר ה־z ניתן ע"י הפרמטריזציה $\mathbf{x}(u,v) = (h(u)\cos v, h(u)\sin v, g(u))$.
בפרט, משטח הסיבוב של פונקציה $h(u)$ נתון ע"י הפרמטריזציה $\mathbf{x}(u,v) = (h(u)\cos v, h(u)\sin v, u)$. הכיוונים הראשיים שלו הם $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ וערכי העקמומיות הראשיים הם:

$$k_1 = -\frac{h''}{\left(1 + (h')^2\right)^{3/2}}, \qquad k_2 = \frac{1}{h\sqrt{1 + (h')^2}}$$

4 משטחים, חלק ב'

4.1 מקדמי כריסטופל ונגזרות של נורמל היחידה

כלל הסכימה: אם אינדקס מופיע במכפלה פעמיים, פעם אחת כאינדקס עליון ופעם אחת כאינדקס תחתון, יש לסכום על הביטוי כאשר האינדקס הכפול משמש **כאינדקס סכימה**. טווח הערכים שאינדקס הסכימה יקבל יקבע לפי מספר המימדים בבעיה.
רכיבי המטריצה $\mathbf{G}$ יסומנו באינדקסים תחתונים, $\mathbf{G} = \left(g_{ij}\right)$. רכיבי **המטריצה ההופכית** $\mathbf{G}^{-1}$ יסומנו באינדקסים עליונים, $\mathbf{G}^{-1} = \left(g^{ij}\right)$.
אם $\mathbf{I}$ היא מטריצת היחידה, אז מתקיים $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G} = \mathbf{I}$ ולכן $g^{ik}g_{kj} = \delta^i{}_j$.
ניתן לרשום את הנגזרות השניות $\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}$ כצירוף לינארי של וקטורי הבסיס:

$$\mathbf{x}_{uu} = \Gamma^1{}_{11}\mathbf{x}_u + \Gamma^2{}_{11}\mathbf{x}_v + b_{11}\hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{x}_{uv} = \Gamma^1{}_{12}\mathbf{x}_u + \Gamma^2{}_{12}\mathbf{x}_v + b_{12}\hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \Gamma^1{}_{22}\mathbf{x}_u + \Gamma^2{}_{22}\mathbf{x}_v + b_{22}\hat{\mathbf{n}}$$

או באופן כללי (עבור מספר מימדים כלשהו):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma^k{}_{ij}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^k} + b_{ij}\hat{\mathbf{n}}$$

המקדמים $\Gamma^k{}_{ij}$ נקראים **מקדמי כריסטופל**, והמקדמים b_{ij} הם רכיבי התבנית היסודית השנייה $\mathbf{B}$. מקדמי כריסטופל הם סימטריים באינדקסים התחתונים: $\Gamma^k{}_{ij} = \Gamma^k{}_{ji}$.
ניתן לחשב את מקדמי כריסטופל באמצעות מטריקת רימן בצורה הבאה:

$$\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2}g^{km}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}g_{mi} + \frac{\partial}{\partial u^i}g_{jm} - \frac{\partial}{\partial u^m}g_{ij}\right)$$

גם את נגזרותיו של נורמל היחידה ניתן לבטא כצירוף לינארי של

$\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$:

$$\hat{\mathbf{n}}_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v$$
$$\hat{\mathbf{n}}_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v$$

כאשר $a_{ij} = -g^{ik}b_{kj}$. באופן כללי ניתן לרשום (עבור מספר מימדים כלשהו):

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial u^j} = -g^{ik}b_{kj}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}$$

4.2 נוסחאות למקדמי כריסטופל

אם המטריקה G אלכסונית, $\mathsf{G} = \operatorname{diag}(g_1, g_2)$, אז:

$$\Gamma^1{}_{11} = +\frac{1}{2g_1}\frac{\partial g_1}{\partial u}, \qquad \Gamma^2{}_{11} = -\frac{1}{2g_2}\frac{\partial g_1}{\partial v}$$
$$\Gamma^1{}_{12} = \Gamma^1{}_{21} = +\frac{1}{2g_1}\frac{\partial g_1}{\partial v}$$
$$\Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = +\frac{1}{2g_2}\frac{\partial g_2}{\partial u}$$
$$\Gamma^1{}_{22} = -\frac{1}{2g_1}\frac{\partial g_2}{\partial u}, \qquad \Gamma^2{}_{22} = +\frac{1}{2g_2}\frac{\partial g_2}{\partial v}$$

ואם היא סקלרית, $\mathsf{G} = g\mathsf{I}$, אז:

$$\Gamma^1{}_{11} = \Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = +\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u}$$
$$\Gamma^2{}_{22} = \Gamma^1{}_{12} = \Gamma^1{}_{21} = +\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial v}$$
$$\Gamma^1{}_{22} = -\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u}, \qquad \Gamma^2{}_{11} = -\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial v}$$

4.3 משוואות גאוס־קודאצי

טנזור העקמומיות של רימן הוא:

$$R^n{}_{ijk} \equiv \frac{\partial}{\partial u^k}\Gamma^n{}_{ij} - \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^n{}_{ik} + \Gamma^m{}_{ij}\Gamma^n{}_{mk} - \Gamma^m{}_{ik}\Gamma^n{}_{mj}$$

משוואת גאוס היא:

$$R^n{}_{ijk} = g^{nm}\left(b_{ij}b_{mk} - b_{ik}b_{mj}\right)$$

ומשוואת קודאצי היא:

$$b_{km}\Gamma^k{}_{ij} - b_{kj}\Gamma^k{}_{im} = \frac{\partial}{\partial u^j}b_{im} - \frac{\partial}{\partial u^m}b_{ij}$$

את עקמומיות גאוס של משטח דו־מימדי ניתן לחשב בצורה הבאה:

$$K = \frac{1}{g_{11}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\Gamma^2{}_{11} - \frac{\partial}{\partial u}\Gamma^2{}_{12} + \right.$$
$$\left. + \Gamma^2{}_{11}\Gamma^2{}_{22} + \Gamma^1{}_{11}\Gamma^2{}_{12} - \Gamma^1{}_{12}\Gamma^2{}_{11} - \left(\Gamma^2{}_{12}\right)^2\right)$$

אם G אלכסונית, $\mathsf{G} = \operatorname{diag}(g_1, g_2)$, אז:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{g_1g_2}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{g_1g_2}}\frac{\partial g_2}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g_1g_2}}\frac{\partial g_1}{\partial v}\right)\right)$$

ואם G סקלרית, $\mathsf{G} = g\mathsf{I}$, אז:

$$K = -\frac{1}{2g}\left(\frac{\partial^2 \ln g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \ln g}{\partial v^2}\right)$$

4.4 שדות וקטוריים, גרדיאנט, קווים אינטגרליים וזרמים

שדה וקטורי על משטח M הוא משפחה חלקה של וקטורים $\mathbf{v}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}M$.

הגרדיאנט $\operatorname{grad} f$ של פונקציה $f: M \to \mathbb{R}$ על המשטח מוגדר לכל $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ כך:

$$\mathrm{d}f(\mathbf{w}) = \langle \operatorname{grad} f, \mathbf{w}\rangle$$
$$\operatorname{grad} f = \mathsf{G}^{-1}\mathrm{d}f, \quad (\operatorname{grad} f)^i = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial u^j}$$

הגרדיאנט מאונך לקווי הגובה של הפונקציה.

העקומה $\gamma(t)$ נקראת **קו אינטגרלי** של שדה וקטורי $\mathbf{v}$ אם $\gamma'(t) = \mathbf{v}(\gamma(t))$. **הזרם של השדה** $\mathbf{v}$ הוא העתקה $\varphi^t: U \to U$ המוגדרת לפי $\varphi^t(\mathbf{u}) = \gamma_{\mathbf{u}}(t)$, כאשר $\gamma_{\mathbf{u}}(t)$ הוא קו אינטגרלי של $\mathbf{v}$ אשר עובר בנקודה $\mathbf{u}$ בזמן $t = 0$, כלומר $\gamma_{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}$. מתקיים:

$$\varphi^0(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \qquad \varphi^s \circ \varphi^t = \varphi^{s+t} = \varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$$

4.5 נגזרת לי וקומוטטור

נגזרת לי של הפונקציה $f: M \to \mathbb{R}$ לפי השדה הווקטורי $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$ מודדת את השינוי של הפונקציה בכיוון $\mathbf{v}$. היא מוגדרת כך:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}f \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\gamma(t))\bigg|_{t=0} = \mathrm{d}f(\mathbf{v}) = \frac{\partial f}{\partial u^i}v^i$$

כאשר $\gamma'(0) = \mathbf{v}$, $\gamma(0) = \mathbf{p}$. הנגזרת מקיימת עבור $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g: M \to \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}_{a\mathbf{v}+b\mathbf{w}}f = a\mathcal{L}_{\mathbf{v}}f + b\mathcal{L}_{\mathbf{w}}f$$
$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(fg) = f\mathcal{L}_{\mathbf{v}}g + g\mathcal{L}_{\mathbf{v}}f$$

כמו כן מתקיים $\mathcal{L}_{\mathbf{e}_i}f = \partial f/\partial u^j$.

יהיו $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ שדות וקטוריים. **הקומוטטור** $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ מוגדר כך:

$$\mathcal{L}_{[\mathbf{v},\mathbf{w}]} = [\mathcal{L}_{\mathbf{v}}, \mathcal{L}_{\mathbf{w}}] = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathcal{L}_{\mathbf{w}} - \mathcal{L}_{\mathbf{w}}\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$$
$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}]^i = \frac{\partial w^i}{\partial u^j}v^j - \frac{\partial v^i}{\partial u^j}w^j$$

הקומוטטור מקיים:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}], \qquad [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = \mathbf{0}$$
$$[a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [a\mathbf{u}, \mathbf{w}] + [b\mathbf{v}, \mathbf{w}]$$
$$[f\mathbf{v}, g\mathbf{w}] = fg[\mathbf{v}, \mathbf{w}] + f(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}g)\mathbf{w} - g(\mathcal{L}_{\mathbf{w}}f)\mathbf{v}$$

וכן את **זהות יעקובי**: $[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] = \mathbf{0}$.

יהיו $\mathbf{v}(\mathbf{u}) = \mathsf{A}\mathbf{u}$, $\mathbf{w}(\mathbf{u}) = \mathsf{B}\mathbf{u}$ שדות וקטוריים, כאשר A, B מטריצות קבועות. אז הקומוטטור הוא:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}](\mathbf{u}) = (\mathsf{BA} - \mathsf{AB})\mathbf{u} = [\mathsf{B}, \mathsf{A}]\mathbf{u}$$

4.6 נגזרת קווריאנטית

נגזרת קווריאנטית $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ היא העתקה חלקה המקיימת עבור שדות וקטוריים $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ופונקציה f את התכונות הבאות:

לינאריות מעל $\mathbb{R}$ ביחס לפרמטר העליון והתחתון:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + b\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{w}$$
$$\boldsymbol{\nabla}_{(a\mathbf{v}+b\mathbf{w})}\mathbf{u} = a\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} + b\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{w}}\mathbf{u}$$

התנהגות טנזורית ביחס לפרמטר התחתון: $\boldsymbol{\nabla}_{f\mathbf{u}}\mathbf{v} = f\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, וכלל לייבניץ ביחס לפרמטר העליון:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}(f\mathbf{v}) = f\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + (\mathcal{L}_{\mathbf{u}}f)\mathbf{v}$$

את נגזרתו הקווריאנטית של וקטור בסיס בכיוון וקטור בסיס אחר ניתן לפרוש באמצעות הבסיס: $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_j = \Gamma^k_{ij}\mathbf{e}_k$, כאשר מקדמי כריסטופל Γ^k_{ij} הם פונקציות אשר תלויות רק בנגזרת הקווריאנטית הספציפית. מכאן נקבל:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{w}}\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v^m}{\partial u^i} + \Gamma^m{}_{ij}v^j\right)w^i\mathbf{e}_m$$

4.7 טנזור הפיתול

טנזור מסדר $\binom{k}{m}$ הוא פונקציה לינארית של k קו־וקטורים ו־m וקטורים. בפרט, וקטור הוא טנזור מסדר $\binom{1}{0}$ וקו־וקטור הוא טנזור מסדר $\binom{0}{1}$. לטנזור מסדר $\binom{k}{m}$ יהיו k אינדקסים עליונים ו־m אינדקסים תחתונים.

טנזור הפיתול הוא טנזור מסדר $\binom{1}{2}$ המוגדר כך:

$$\mathsf{T}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{w}}\mathbf{v} - [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$$

ורכיביו הם $T^k_{ij} = \Gamma^k{}_{ij} - \Gamma^k{}_{ji}$. אם טנזור הפיתול מתאפס, הנגזרת הקווריאנטית היא סימטרית, כלומר מתקיים לכל i, j, k $\Gamma^k{}_{ij} = \Gamma^k{}_{ji}$. במקרה כזה, עבור וקטורי הבסיס מתקיים $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{e}_i}\mathbf{e}_j = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{e}_j}\mathbf{e}_i$.

4.8 קשירויות מיוחדות

יהיו $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ שדות וקטוריים על $\mathbb{R}^n$. **הקשירות השטוחה** (או **הנגזרת הקווריאנטית האוקלידית**) על $\mathbb{R}^n$ מוגדרת בנקודה $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ כך:

$$\mathring{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{v}}\mathbf{w} \equiv \mathrm{d}_{\mathbf{p}}\mathbf{w}(\mathbf{v}) = (\mathbf{w} \circ \gamma)'(0) = v^i\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u^i}$$

כאשר העקומה γ מקיימת $\gamma'(0) = \mathbf{v}$, $\gamma(0) = \mathbf{p}$. הקשירות השטוחה היא נגזרת קווריאנטית בה כל מקדמי כריסטופל מתאפסים, ולכן גם טנזורי הפיתול והעקמומיות (ראו להלן) שלה מתאפסים. ניתן כעת להגדיר את אופרטור הצורה כך: $\mathsf{S}\mathbf{v} \equiv -\mathring{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{n}}$.

יהי M על־משטח ב־$\mathbb{R}^{n+1}$ (כלומר, משטח בעל n מימדים). בנוסף תהי $\mathbf{p} \in M$ נקודה על המשטח ויהי $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n+1}$ וקטור. **ההטלה האורתוגונלית** $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ של הווקטור $\mathbf{r}$ על המרחב המשיק $T_{\mathbf{p}}M$ מוגדרת כך:

$$\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} - \langle \mathbf{r}, \hat{\mathbf{n}}\rangle\hat{\mathbf{n}}$$

הקשירות המושרית על המשטח היא:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\mathbf{w} \equiv \pi_{\mathbf{p}}\left(\mathring{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{v}}\mathbf{w}\right) = \mathring{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - \mathsf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{w})\hat{\mathbf{n}}$$

היא סימטרית, ומקדמי כריסטופל שלה זהים לאלה של המשטח.

קשירות לוי־צ'יוויטה היא נגזרת קווריאנטית סימטרית המקיימת עבור שדות וקטוריים $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ על משטח M:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{w}\rangle$$

לפי **משפט לוי־צ'יוויטה**, למשטח עם מטריקה G קיימת קשירות לוי־צ'יוויטה יחידה, שהיא הקשירות המושרית על המשטח.

4.9 טנזור העקמומיות של רימן

טנזור העקמומיות של רימן (בו כבר פגשנו בסעיף 4.3) הוא טנזור מסדר $\binom{1}{3}$ המוגדר כך:

$$\mathsf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w} \equiv \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{w} - \boldsymbol{\nabla}_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}\mathbf{w}$$
$$\mathsf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w} = R^n{}_{ijk}u^kv^jw^i\mathbf{e}_n$$

הטנזור הוא אנטי־סימטרי: $\mathsf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w} = -\mathsf{R}(\mathbf{v}, \mathbf{u})\mathbf{w}$. אם טנזור הפיתול T מתאפס, כלומר $\boldsymbol{\nabla}$ סימטרית, אז מתקיימת **זהות יעקובי**:

$$\mathsf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w} + \mathsf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{u})\mathbf{v} + \mathsf{R}(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

ואם $\boldsymbol{\nabla}$ היא קשירות לוי־צ'יוויטה אז:

$$\langle \mathsf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w}, \mathbf{z}\rangle = -\langle \mathsf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{z}, \mathbf{w}\rangle$$
$$\langle \mathsf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w}, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathsf{R}(\mathbf{w}, \mathbf{z})\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$$

באמצעות טנזור רימן ניתן להגדיר גם את טנזור ריצ'י:

$$\mathsf{Ric}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv \operatorname{tr}(\mathbf{u} \mapsto \mathsf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n \langle \mathsf{R}(\mathbf{e}_i, \mathbf{v})\mathbf{w}, \mathbf{e}_i\rangle$$

כאשר $\{\mathbf{e}_i\}$ בסיס אורתונורמלי ב־$T_{\mathbf{p}}M$. טנזור ריצ'י הוא סימטרי: $\mathsf{Ric}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathsf{Ric}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$. בקואורדינטות מתקיים:

$$(\mathsf{Ric})_{k\ell} \equiv R_{k\ell} = R^i_{ik\ell}$$

כאשר יש סכימה על האינדקס הכפול i. **עקמומיות ריצ'י** בכיוון $\mathbf{v}$, $\|\mathbf{v}\| = 1$, היא $R(\mathbf{v}) \equiv \mathsf{Ric}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$.

5 משטחים, חלק ג'

5.1 דיברגנץ ואופרטור לפלס־בלטרמי

תהי G מטריקת רימן ונסמן $g \equiv \det \mathsf{G}$. העקבה של מקדמי כריסטופל היא:

$$\Gamma^i{}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u^j}\sqrt{g}$$

הדיברגנץ של שדה וקטורי $\mathbf{v}$ מוגדר כך: (האינדקס j מופיע פעמיים ולכן יש סכימה על j)

$$\operatorname{div}\mathbf{v} \equiv \operatorname{tr}(\mathbf{u} \mapsto \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\sqrt{g}\,v^j\right)$$

אופרטור לפלס־בלטרמי של פונקציה f מוגדר כך: (כאן יש סכימה על i, j)

$$\Delta f \equiv \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)$$

5.2 עקמומיות חתך

יהי M משטח עם קשירות לוי־צ'יוויטה $\boldsymbol{\nabla}$, תהי $\mathbf{p} \in M$ נקודה על המשטח ויהי σ תת־מרחב דו־מימדי של $T_{\mathbf{p}}M$ הנפרש ע"י הווקטורים המשיקים $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. **עקמומיות החתך** של σ בנקודה $\mathbf{p}$ מוגדרת כך:

$$K_\sigma \equiv \frac{\langle \mathsf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2}$$

יהי $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ על־משטח n־מימדי ויהיו $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ וקטורים משיקים ל־M. אז מתקיים:

$$\langle \mathsf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w}, \mathbf{z}\rangle = \mathsf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathsf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) - \mathsf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{w})\mathsf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{z})$$

$$K_\sigma \equiv \frac{\mathsf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\mathsf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \mathsf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle^2}$$

בפרט, עבור משטח דו־מימדי $K_\sigma = K$; אם $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ בסיס אורתונורמלי של $T_{\mathbf{p}}M$ המורכב מווקטורים עצמיים של אופרטור הצורה S, ו־$\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$ הם הווקטורים העצמיים המתאימים לערכים העצמיים λ_i, λ_j, אז $K_\sigma = \lambda_i\lambda_j$ כאשר $\sigma = \operatorname{Span}\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}$; ועל ספירת היחידה $\mathbb{S}^n$, אופרטור הצורה הוא אופרטור הזהות ולכן כל עקמומיות חתך שווה ל־1.

5.3 העברה במקביל

השדה הווקטורי $\mathbf{v}$ נקרא **שדה מקביל לאורך** γ אם מתקיים $\boldsymbol{\nabla}_{\dot\gamma}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. משוואה זו שקולה למערכת המשוואות:

$$\dot{v}^m + \Gamma^m_{ij}\dot\gamma^i v^j = 0, \qquad m = 1, \ldots, n$$

או בצורה קומפקטית יותר, $\dot{\mathbf{v}} + \mathsf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ כאשר A היא מטריצה המקיימת $A^m_{\ j} = \Gamma^m_{ij}\dot\gamma^i$. (כל הנקודות מסמלות גזירה לפי הפרמטר t של העקומה γ). נסמן ב־$\{\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n\}$ את השדות המקבילים בעלי תנאי ההתחלה:

$$\mathbf{E}_i(\gamma(0)) = \mathbf{e}_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

כאשר $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ הוא בסיס של המרחב המשיק. אז $\{\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n\}$ הוא בסיס של מרחב השדות המקבילים לאורך העקומה γ, ולכל שדה מקביל $\mathbf{v}$ ניתן לרשום $\mathbf{v} = v^i\mathbf{E}_i$. השדה $\mathbf{v}$ הוא שדה מקביל אם ורק אם כל אחת מהקואורדינטות v^i היא קבועה. בנוסף, אם $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ הם שני שדות מקבילים ו־$\boldsymbol{\nabla}$ היא קשירות לוי־צ'יוויטה אז $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ ו־$\|\mathbf{v}\|$ הם קבועים לאורך העקומה.

נגדיר העתקה לינארית:

$$\mathsf{P}^t_a: T_{\gamma(a)}M \to T_{\gamma(t)}M, \qquad \mathsf{P}^t_a\mathbf{v}(\gamma(a)) = \mathbf{v}(\gamma(t))$$

ההעתקה היא איזומורפיזם בין המרחבים המשיקים בנקודות שונות על העקומה, ומתקיים: $\mathsf{P}^a_a = \mathsf{I}$, $\mathsf{P}^s_a = \mathsf{P}^s_t \circ \mathsf{P}^t_a$. אם $\boldsymbol{\nabla}$ היא קשירות לוי־צ'יוויטה, אז P היא גם איזומטריה.

5.4 קווים גיאודזיים

עקומה γ נקראת **קו גיאודזי** אם בפרמטריזציה טבעית מתקיים $\boldsymbol{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma = \mathbf{0}$. משוואה זו שקולה למערכת המשוואות:

$$\ddot\gamma^m + \Gamma^m_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j = 0, \qquad m = 1, \ldots, n$$

ממשפט הקיום והיחידות, לכל תנאי התחלה $\gamma(0), \dot\gamma(0)$ קיים קו גיאודזי יחיד שמקיים אותו.

אם $\boldsymbol{\nabla}$ היא קשירות לוי־צ'יוויטה של מטריקה G כלשהי אז ההעברה במקביל היא איזומטריה, ולכן עבור קו גיאודזי מתקיים $\|\dot\gamma\| = \mathrm{const}$.

אם γ היא קו גיאודזי על תחום דו־מימדי ו־$\mathbf{v}$ הוא שדה מקביל לאורך γ, אז הזווית $\alpha(t)$ בין γ ו־$\mathbf{v}$ היא קבועה והגודל $\|\mathbf{v}\|$ הוא קבוע.

עקומה γ עם עקמומיות שונה מאפס על משטח היא גיאודזית אם ורק אם הנורמל לעקומה מקביל לנורמל למשטח בכל נקודה. עקומה עם עקמומיות אפס היא תמיד גיאודזית.

אם $\gamma(t)$ היא קו גיאודזי אז גם $\gamma(at + b)$ היא קו גיאודזי.

נשים לב כי עבור קשירות שטוחה משוואת הקווים הגיאודזיים היא $\mathring{\boldsymbol{\nabla}}_{\dot\gamma}\dot\gamma = \ddot\gamma = \mathbf{0}$. מכאן $\gamma(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$ כאשר $\mathbf{a} = \dot\gamma(0)$ ו־$\mathbf{b} = \gamma(0)$. כל הקווים הגיאודזיים ב־$\mathbb{R}^n$ הם קווים ישרים. בנוסף, על הספירה $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, הקווים הגיאודזיים הם המעגלים הגדולים.

העקמומיות הגיאודזית של עקומה בפרמטריזציה טבעית היא $\kappa_g = \|\boldsymbol{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma\|$, והיא מתאפסת אם העקומה היא גיאודזית.

5.5 משוואות אוילר־לגראנג'

נניח כי $\boldsymbol{\nabla}$ היא קשירות לוי־צ'יוויטה של מטריקה G. נסמן $\mathbf{q} \equiv (q^1, \ldots, q^n)$ ונגדיר את **הלגראנג'יאן**:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \equiv \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 = \frac{1}{2}g_{ij}(\mathbf{q})\dot q^i\dot q^j$$

בנוסף נגדיר את **הפעולה** (זהו פונקציונל אשר מקבל פונקציה $\mathbf{q}$ ומחזיר ערך ממשי):

$$S[\mathbf{q}] \equiv \int_a^b L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\,\mathrm{d}t$$

הפעולה מקבלת ערך קיצון עבור $\mathbf{q}$ המקיים את **משוואות אוילר־לגראנג'**:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$

עבור הלגראנג'יאן שהגדרנו לעיל, משוואות אלה שקולות למשוואות של קו גיאודזי.

נוסחת קלרו: על משטח סיבוב המוגדר לפי $z = g(u)$ ו־$r = h(u)$ מתקיים עבור קו גיאודזי γ הקשר $r\cos\alpha = \mathrm{const}$, כאשר α היא הזווית בין $\dot\gamma$ לבין קו הרוחב $u = \mathrm{const}$.

5.6 קואורדינטות חצי־גיאודזיות

בשני מימדים, נבנה קואורדינטות כך שהמטריקה תהיה:

$$\mathrm{d}s^2 = g^2(t, x)\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2, \qquad \mathsf{G} = \begin{pmatrix} g^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

יהי $\gamma(t)$ קו גיאודזי בפרמטריזציה טבעית, $\|\dot\gamma(t)\| = 1$, ויהי $\boldsymbol{\beta}(t, x)$ קו גיאודזי המתחיל בנקודה $\gamma(t)$ בכיוון וקטור $\mathbf{w}(t)$ כך ש־$\mathbf{w}(t) \perp \dot\gamma(t)$ ו־$\|\mathbf{w}(t)\| = 1$. נסמן $\mathbf{e}_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ ו־$\mathbf{e}_2 = \frac{\partial}{\partial x}$. אז ניתן להראות כי מתקיים:

$$\Gamma^1{}_{22} = \Gamma^2{}_{22} = \Gamma^2{}_{12} = 0, \qquad \Gamma^1{}_{12} = \frac{g_x}{g}$$
$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle = 0, \quad K = -\frac{g_{xx}}{g}, \quad g(t, 0) = 1, \quad g_x(t, 0) = 0$$

אם העקמומיות היא קבועה, $K = +1$, $K = 0$ או $K = -1$, אז המשטח איזומטרי לספירה, למישור או למישור לובצ'בסקי בהתאמה. (**מישור לובצ'בסקי** הוא חצי המישור העליון עם המטריקה $\mathrm{d}s^2 = \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right)/y^2$).

5.7 משפט גאוס־בונה

יהי M משטח דו־מימדי. **מאפיין אוילר** של המשטח הוא:

$$\chi(M) = V - E + F = 2 - 2g$$

כאשר V הוא מספר הקודקודים, E הוא מספר הצלעות, F הוא מספר הפאות ו־g הוא **הגנוס**, כלומר מספר ה"ידיות" או ה"חורים". לפי **משפט גאוס־בונה** מתקיים:

$$\iint_M K\,\mathrm{d}\sigma = 2\pi\chi(M)$$

כאשר K היא עקמומיות גאוס של M ו־$\mathrm{d}\sigma$ הוא אלמנט שטח של M (לפי מטריקת רימן). להוכחת המשפט מחלקים את M למשולשים קטנים כך שכל משולש נכנס למפה אחת של קואורדינטות חצי־גיאודזיות, ומשתמשים בשוויון:

$$\iint_\Delta K\,\mathrm{d}\sigma + \int_\gamma \kappa_g\,\mathrm{d}s + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$$

כאשר Δ הוא משולש, γ היא שפת המשולש, K היא עקמומיות גאוס, κ_g היא העקמומיות הגיאודזית של γ ו־$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ הן הזוויות החיצוניות של המשולש (הזווית החיצונית לזווית β_i של המשולש היא $\alpha_i = \pi - \beta_1$).

עבור **משולש גיאודזי** Δ על המשטח, בעל שטח $\mathcal{A}(\Delta)$, אם עקמומיות גאוס היא $K = +1$ (ספירה) אז מתקיים $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi + \mathcal{A}(\Delta)$, ואם $K = -1$ אז $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi - \mathcal{A}(\Delta)$.

משפט גרין:

$$\int_\gamma (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$