תרגול 7 - מרחבים וקטוריים

28 ביולי 2020

1 תלות ופרישה

תרגילים:

1. יהא $V=\mathbb{F}^n$ מ"ו, $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו: ($A$ הפיכה) אמ"ם (לכל $v_1,\dots,v_m$ בת"ל מתקיים ש־ $Av_1,\dots,Av_m$ בת"ל).

פתרון: טענת עזר: A הפיכה אמ"ם לכל $v\neq 0$ מתקיים $Av\neq 0$.

הוכחת טענת עזר: אם A הפיכה אז לאחר דירוג נקבל את I_n, ולכן אין משתנה חופשי ב־ A ולמערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד שהוא $x=0$. לכן לכל $v\neq 0$ מתקיים $Av\neq 0$.

בכיוון ההפוך, אם A לא הפיכה, אז לאחר דירוג יש שורת אפסים, ומריבועיות יש גם משתנה חופשי, ולכן יש פתרון לא טריוויאלי.

כעת ניגש לפתרון השאלה: $\Leftarrow$: נניח A הפיכה, ויהיו $v_1,\dots v_m$ בת"ל. יהי

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(Av_i)=0$$

צ"ל של $Av_1,\dots,Av_m$ שמתאפס. נקבל:

$$0=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(Av_i)=\sum_{i=1}^{m}A(\alpha_iv_i)=A\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_iv_i\right)$$

כעת, בגלל ש־A הפיכה, הפתרון היחידה הוא הטריוויאלי, לפי טענת העזר, ולכן $\sum_{i=1}^{m}\alpha_iv_i$, וכיון שהוקטורים בת"ל נקבל $\forall i:\alpha_i=0$, ולכן $Av_1,\dots,Av_m$ בת"ל.

$\Rightarrow$: נתון שלכל $v_1,\dots,v_m$ בת"ל מתקיים ש־ $Av_1,\dots,Av_m$ בת"ל. בפרט לכל $v\neq 0$ אז הוקטור בת"ל, ולכן לכל $v\neq 0$ מתקיים Av בת"ל ולכן $Av\neq 0$ ולכן A הפיכה, לפי טענת עזר.

2 בסיס ומימד

V מ"ו. קבוצה $B\subseteq V$ של וקטורים המקיימת:

- B בת"ל
- $span(B)=V$

נקראת בסיס. גודל בסיס נקרא מימד המרחב.

משפטים חשובים:

1. V מ"ו ממימד n. השלישי חינם: כל 2 מבין השלושה גוררים את השלישי

(א) $|B|=n$

(ב) $span(B)=V$

(ג) B בת"ל.

2. משפט המימדיים: V מ"ו, $W,U \leq V$ ת"מ. אזי:

$$\dim(W+U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U)$$

3. למה שימושית מאוד: "הכלה בכיוון אחד ושיוויון מימדיים גורר שיוויון מרחבים":

$$U \subseteq V \wedge \dim U = \dim V \Rightarrow U = V$$

תרגילים:

1. עבור $W_2 = span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $W_1 = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : \begin{matrix} a-3b-5c=d \\ 4b+8c-2d=2a \end{matrix}\right\}$. מצאו בסיס ל־ $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1+W_2$.

פתרון: עבור W_2: "קל לראות" (=שייך לתרגול קודם) שהוקטורים בת"ל, ולכן מהווים בסיס.
עבור W_1: בתרגול קודם חישבנו:

$$W_1 = \left\{\begin{pmatrix} 5a+2b \\ -2a-b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : b,a \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ושוב, קל לראות שהוקטורים בת"ל, ולכן בסיס.
כעת, עבור W_1+W_2: בתרגיל בית רואים ש:

$$span(A) + span(B) = span(A \cup B)$$

ולכן אצלנו:

$$W_1+W_2 = span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

נותר לוודא ששלושת הוקטורים בת"ל.
לגבי החיתוך $W_1 \cap W_2$: ניזכר שראינו שאם שני מרחבים מוצגים כאוסף פתרונות של מערכת הומ', אז החיתוך שלהם זה אוסף הפתרונות של המערכת המורכבת משתי המערכות. W_1 כבר מוצג כאוסף פתרונות של המערכת $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$. נמצא את המערכת שמתאימה ל־W_2:

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \iff \exists \alpha, \beta : \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ כלומר, אמ"ם יש פתרון

למערכת:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & a \\ -1 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & b+c-d \\ 0 & 0 & a-2c \end{array}\right)$$

יש פתרון למערכת אמ"ם $\begin{cases} b+c-d=0 \\ a-2c=0 \end{cases}$. כלומר נקבל:

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : A_2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

עבור $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. לכן $W_1 \cap W_2$ הוא אוסף פתרונות המערכת:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-4R_3+2R_4 \to R_2]{R_1+3R_3-R_4 \to R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן אוסף פתרונות המערכת הוא:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2. יהא V מ"ו. נסמן $\dim V = n$. יהא W ת"מ, כך ש־ $\dim W = n-1$. הוכיחו שלכל U ת"מ שלא מוכל ב־W מתקיים: $W + U = V$.

פתרון: קיים $u \in U \setminus W$. בנוסף ניקח בסיס ל־W $B_W = \{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$. ולכן $\{w_1, \ldots, w_{n-1}, u\}$ בת"ל (כי u לא נפרש ע"י B_W). כעת, $span\{w_1, \ldots, w_{n-1}, u\} \subseteq W + U$ כי:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i w_1}_{\in W} + \underbrace{\alpha_n u}_{\in U} \in W + U$$

ולכן $\dim(W+U) \geq n$, אך גם תמיד $\dim(W+U) \leq \dim V = n$ ולכן נקבל $\dim(W+U) = n$ וממשפט 3 נקבל שיוויון במרחבים.

3. יהא V מ"ו ממימד 5. יהיו W, U ת"מ כך ש־ $\dim W = 4, \dim U = 3$. מצאו מה אפשרויות ל $\dim(W \cap U)$, עם דוגמא לכל אפשרות.

פתרון: אפשרות אחת: $U \subseteq W$ ואז נקבל $\dim(U \cap W) = \dim(U) = 3$. לדוגמא: $V = \mathbb{R}^5, W = span\{e_1, e_2, e_3, e_4\}, U = span\{e_1, e_2, e_3\}$.

אפשרות שנייה: $U \not\subseteq W$, ואז לפי תרגיל קודם נקבל $U + W = V$ ולכן לפי משפט המימדים:

$$5 = \dim V = \dim(W+U) = \dim W + \dim U - \dim(U \cap W) = 4 + 3 - \dim(W \cap U) \Rightarrow \dim(W \cap U) = 2$$

לדוגמא: $V = \mathbb{R}^5, W = span\{e_1, e_2, e_3, e_4\}, U = span\{e_1, e_2, e_5\}$.

4. יהא V מ"וממימד אי־זוגי $\dim V = 2n+1$. יהיו W_1, W_2, U_1, U_2 ת"מ המקיימים:

$$W_1 + W_2 = V = U_1 + U_2$$

הוכיחו:

$$(W_1 \cap U_1) + (W_1 \cap U_2) + (W_2 \cap U_1) + (W_2 \cap U_2) \neq \{0\}$$

פתרון: שימו לב שמספיק להראות שאחד החיתוכים מכיל וקטור שונה מאפס (כי אז וקטור זה נמצא גם בסכום). כעת, $\dim(W_1 + W_2) = 2n+1$, ולכן אחד המימדים הוא לפחות $n+1$, כי אם בשלילה $\dim W_1, \dim W_2 \leq n$ אז לפי המשפט נקבל $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \leq n + n - \dim(W_1 \cap W_2) < 2n+1$ בסתירה. נסמן ב־ W_i, U_j את המרחבים עם מימד לפחות $n+1$. לכן נקבל:

$$2n+1 \geq \dim(W_i + U_j) = \dim(W_i) + \dim(U_j) - \dim(W_i \cap U_j) \geq 2n+2 - \dim(W_i \cap U_j)$$

ולכן:

$$\dim(W_i \cap U_j) \geq 1$$

מה שאומר שיש בו וקטור שונה מ0. שימו לב: $\dim\{0\} = 0$ כי למרחב זה יש בסיס אחד והוא $B = \emptyset$.

5. הפריכו את הטענה כאשר המימד זוגי טבעי.

פתרון: ניקח את $\mathbb{R}^2$ וניקח $W_1 = span\{e_1\}, W_2 = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, U_1 = span\{e_2\}, U_2 = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$. שימו לב שהחיתוכים המדוברים הם רק וקטור האפס.

6. יהא V מ"ו, יהיו $W_1 \subseteq W_2$ שני ת"מ. הוכיחו או הפריכו: כל בסיס של W_2 ניתן לצמצום לבסיס של W_1.

פתרון: הפרכה: ניקח ה$V = W_2 = \mathbb{R}^2, W_1 = span\{e_1\}$, וניקח בסיס $B_{W_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. לא ניתן לצמצם אותו לבסיס של W_1.