תרגול 4 - מ"ע ו"ע וע"ע

הגדרה. תהי A מטריצה. אם קיים וקטור $v \neq 0$ כך ש-$Av = \lambda v$ אז λ נקרא ערך עצמי (ע"ע) ו-v נקרא וקטור עצמי (ו"ע) של A המותאם ל-λ.

הגדרה. תהי $T : V \to V$ ה"ל. אם קיים וקטור $v \neq 0$ כך ש-$T(v) = \lambda v$ אז λ נקרא ערך עצמי (ע"ע) ו-v נקרא וקטור עצמי של T (ו"ע) המותאם ל- λ

הערה. תהי $T : V \to V$ ה"ל ו-B בסיס ל-V אז

$$\forall\lambda \in \mathbb{F}, v \in V : \ [T]_B^B [v]_B = \lambda [v]_B \Leftrightarrow T(v) = \lambda v$$

ואם נבחר את B להיות הבסיס הסטנדטי אז מתקיים

$$\forall\lambda \in \mathbb{F}, v \in V : \ [T]_S^S v = \lambda v \Leftrightarrow T(v) = \lambda v$$

כלומר הע"ע והו"ע של העתקה לינארית הם הע"ע וה"וע של המטריצה המייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי.

הגדרה. תהי A מטריצה ו- λ ערך עצמי אז

$$V_\lambda = \{v | Av = \lambda v\} = N(A - \lambda I)$$

הוא המרחב העצמי (מ"ע) של A השייך ל-λ.

איך מוצאים ע"עים וו"עים של מטריצה?

עבור $v \neq 0$ מתקיים

$$\begin{gathered} Av = \lambda v \\ \Updownarrow \\ Av - \lambda v = 0 \\ \Updownarrow \\ (A - \lambda I)v = 0 \end{gathered}$$

$(A - \lambda I)$לא הפיכה $\Leftrightarrow p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$.

כלומר λ הוא ע"ע של A אמ"מ $p_A(\lambda) = 0$. כאשר $p_A(\lambda) = |\lambda I_n - A|$ הוא הפולינום האופני של A.

דוגמה. $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ מצא את עע וע ומע

פתרון. אזי

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 5 & -6 \\ 3 & \lambda + 4 \end{pmatrix} \right| \\ &= (\lambda - 5)(\lambda + 4) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

ולכן $\lambda_2=-1$, $\lambda_1=2$ הם ע"ע של A.
אחרי שיודעים ע"ע - איך מוצאים ו"ע? עבור מטריצה A נניח שמצאנו ע"ע λ אזי הו"ע המתאים (לע"ע λ) מקיים

$$(A-\lambda I)v=0$$

כלומר

$$v\in N(A-\lambda I)$$

נמשיך בדוגמא: $A=\begin{pmatrix}5 & 6\\ -3 & -4\end{pmatrix}$ $\lambda_1=2$ נמצא ו"ע מתאים. צריך למצוא

$$0\neq v\in N\left[\begin{pmatrix}5 & 6\\ -3 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right]$$

כלומר

$$v\in N\left[\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & -6\end{pmatrix}\right]$$

נדרג

$$\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & -6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & 6\\ 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\in N\left[\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & -6\end{pmatrix}\right]$$

ולכן הוא ו"ע המתאמים ל $\lambda_1=2$. אכן מתקיים

$$\begin{pmatrix}5 & 6\\ -3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$$

באותו אופן נמצא ו"ע ל $\lambda_2=-1$. נמצא

$$v\in N\left[\begin{pmatrix}5 & 6\\ -3 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right]$$

נדרג

$$\begin{pmatrix}6 & 6\\ -3 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}6 & 6\\ 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

כלומר $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ ו"ע המתאים ל $\lambda_2=-1$.

תרגיל. יהי v ו"ע של המטריצה A המותאם לע"ע λ הוכיחו ש- v הוא ו"ע של המטריצה A^3+A+I המותאם לע"ע $\lambda^3+\lambda+1$

הוכחה. צריך להוכיח ש-$\left(A^3+A+I\right)v=\left(\lambda^3+\lambda+1\right)v$ הבה נראה זאת.

$$\begin{aligned}
& \left(A^3+A+I\right)v && =\\
= \quad & A^3v+Av+Iv && =\\
= \quad & A^3v+Av+Iv && =\\
= \quad & A\left(A\left(\lambda v\right)\right)+\lambda v+v && =\\
= \quad & \lambda^3v+\lambda v+v && =\\
= \quad & \left(\lambda^3+\lambda+1\right)v &&
\end{aligned}$$

$\square$

תרגיל. יהי $\lambda \neq 0$ עע של המטריצה ההפיכה A. הראה שאם v הוא וע של A אז הוא גם וע של A^{-1} ומצא את הערך העצמי המתאי לו.

הוכחה. נתון ש-

$$Av = \lambda v$$
$$\Downarrow$$
$$A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v$$

לכן v הוא וע של A^{-1} המתאים לעע λ^{-1}

כלומר העניין של החזקות מהתרגיל הקודם עובד גם על חזקות שליליות. $\square$

הגדרה. המטריצות A, B דומות אם קיימת מטריצה P הפיכה כך ש-$A = P^{-1}BP$

תרגיל. למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני.

הוכחה.

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left|\lambda P^{-1}P - P^{-1}BP\right| = \left|P^{-1}(\lambda I - B)P\right| = \left|P^{-1}\right||\lambda I - B||P| = |\lambda I - B| = p_B(\lambda)$$

$\square$