

תרגיל 8

1. תהי A תת קבוצה של $[0,1]^2$ מדידה לבג (ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה) עם מידה $m_2(A) = 1$ כאשר $m_2 = m \times m$ ו m הינה מידת לבג. הראו כי כמעט לכל $x \in [0,1]$ הקבוצה $s_x(A) = \{y : (x, y) \in A\}$ הינה בעלת מידה $m(s_x(A)) = 1$.

פתרון: ברור כי הפונקציה 1_A הינה מדידה לבג ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה של $[0,1]^2$. כמו כן נובע כי

$$\int_{[0,1]^2} 1_A(x, y) dm_2(x, y) = m_2(A) = 1 < \infty$$

עפ"י משפט טונלי נקבל כי

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} 1_{s_x(A)}(x, y) m(dy) \right) m(dx) = \int_{[0,1]} m(s_x(A)) m(dx) = 1$$

נובע כי

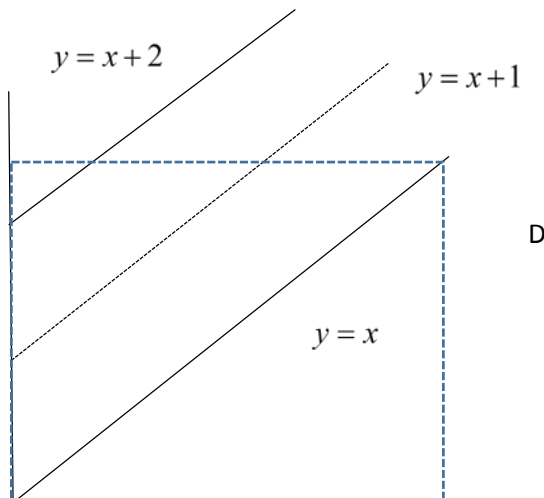
$$\int_{[0,1]} (1 - m(s_x(A))) m(dx) = 0$$

מכיוון ש $s_x(A) \subseteq [0,1]$ נובע כי $m(s_x(A)) \leq 1$ ולכן $1 - m(s_x(A)) \geq 0$ לכל $x \in [0,1]$. ראינו כבר כי אם $f \geq 0$ כב"מ וגם $\int f d\mu = 0$ אזי נובע כי $f = 0$ כב"מ. מכאן ש $1 - m(s_x(A)) = 0$ כב"מ ולכן $m(s_x(A)) = 1$ כב"מ.

2. יהי $X = Y = \mathbb{R}$ ונסתכל על \mathbb{R}^2 ביחס לסיגמא אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \text{ and } x \leq y < x+1 \\ -1 & x \geq 0 \text{ and } x+1 \leq y < x+2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הראו כי $\int \int f(x, y) m(dx) m(dy) \neq \int \int f(x, y) m(dy) m(dx)$. מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?



נחשב

$$h(y) = \int f(x, y) m(dx) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \int_0^y 1 dm = y & 0 \leq y < 1 \\ \int_0^{y-1} -1 dm + \int_{y-1}^y 1 dm = 2 - y & 1 \leq y < 2 \\ \int_{y-2}^{y-1} -1 dm + \int_{y-1}^y 1 dm = 0 & 2 \leq y < \infty \end{cases}$$

ולכן

$$\iint f(x, y) m(dx) m(dy) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) dm = \int_0^1 y m(dy) + \int_1^2 (2-y) m(dy) = 1$$

מצד שני,

$$g(x) = \int f(x, y) m(dy) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_x^{x+1} 1 m(dy) + \int_{x+1}^{x+2} -1 m(dy) = 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

ולכן

$$\iint f(x, y) m(dy) m(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dm = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dm = 0$$

ומכאן ש

$$1 = \iint f(x, y) m(dx) m(dy) \neq \iint f(x, y) m(dy) m(dx) = 0$$

על מנת להראות כי אין סתירה למשפט פוביני, נראה כי $\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dm \times dm = \infty$. נחשב את

$$\int_D |f(x, y)| dm \times dm \quad \text{כאשר } D_x \text{ הינו הריבוע בציור שצולעו באורך } x. \text{ ברור כי אינטגרל כפול}$$

על הפונקציה הינו השטח של הריבוע D_x פחות שני המשולשים. כלומר, אם גודל הריבוע הוא

x^2 אזי

$$\int_{D_x} |f(x, y)| dm \times dm = x^2 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{(x-2)^2}{2} \right) = 2x - 2$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dm \times dm = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{D_x} |f(x, y)| dm \times dm = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x - 2 = \infty$$

נובע כי $\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dm \times dm = \infty$ מכאן כי תנאי משפט פוביני אינם מתקיימים ולכן אין סתירה.

$$3. \text{ הוכיחו כי } I = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

רמז: חשבו קודם את I^2 וחשבו את האינטגרל הכפול ע"י

מעבר לקורדינטות פולאריות.

$$\text{פתרון: } I^2 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \iint_{[0, \infty) \times [0, \infty)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy dx$$

הינה $f(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ הפונקציה

רציפה ולכן מדידה ביחס לסיגמא אלגברת לבג המכפלה. כמו כן היא חיובית ולכן ניתן להשתמש במשפט טונלי. לכן

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} m(dx) m(dy) = \int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} m \times m(dx, dy)$$

מכיוון ש f רציפה היא אינטגרלית רימן לפחות במובן הרחב (כלומר האינטגרל יכול להיות

שווה ל ∞ . נוכל לעבור לקורדינאטות פולאריות

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

נקבל כי

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$.I = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ ומכאן ש}$$