תרגיל בית 5 אלגברה מופשטת 2

1. קבעו האם האידיאלים הבאים הם ראשוניים\מקסימליים:

   (א) $I = \{(n,0) \mid n \in \mathbb{Z}\} \lhd \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

   (ב) $\langle 2x+1 \rangle \lhd \mathbb{Z}[x]$.

2. יהי R חוג סופי קומוטטיבי, הוכיחו כי כל אידיאל ראשוני של R הוא מקסימלי.

3. יהי R חוג קומוטטיבי, ותהי $\{P_i\}_{i\in I}$שרשרת אידיאלים ראשוניים של R. הוכיחו כי $\cup_{i\in I} P_i$ הוא אידיאל ראשוני.

4. תהי $\{P_i\}_{i\in I}$ שרשרת אידיאלים ראשוניים בחוג כלשהו R, הוכיחו כי $\cap_{i\in I} P_i$ הוא אידיאל ראשוני.

5. תנו דוגמא לחיתוך של אידאלים ראשוניים שאיננו ראשוני.

6. (א) יהי R חוג קומוטטיבי. הוכיחו כי $R \times \{0\} \lhd R \times R$ אידאל ראשוני.

   (ב) עבור F שדה, הראו שב $F \times F$ אין אידיאליים ראשוניים פרט ל$\{0\} \times F$ ו $F \times \{0\}$.

   (ג) לכל $n \in \mathbb{N}$, בנו חוג שיש בו בדיוק n אידיאלים ראשוניים.

7. נסמן את החיתוך של כל האידיאלים המקסימליים:

$$J_0(R) = \cap_{M \lhd R,\, \text{maximal}} M$$

   (א) האם הוא אידאל?

   (ב) חשבו את $J_0(R)$ עבור החוגים: $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.

   (ג) הוכיחו כי אם $I \lhd R$ מקיים $J_0(R) + I = R$ (כלומר שהם קו-מקסימליים) אז $I = R$.

   (ד) הוכיחו כי $J_0\left(R/J_0(R)\right) = 0$.

8. עבור חוג R, מסמנים ב $Spec(R)$ את אוסף האידיאלים הראשוניים של החוג.
לכל תת קבוצה $S \subseteq R$ מגדירים

$$V(S) = \{P \in Spec \,|\, S \subseteq P\} \subseteq Spec(R)$$

(א) הוכיחו כי אם I, J הם אידיאלים של R אז $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$.

(ב) הוכיחו כי אם $\{I_i\}$ אוסף של אידיאלים אז $\cap V(I_i) = V\left(\sum I_i\right)$.

(ג) בונוס: הראו שבכך הגדרנו טופולוגיה על $Spec(R)$.

9. מצאו חיובי שלם a המקיים $a \equiv 1 \pmod{11}$, $a \equiv 2 \pmod{9}$ ו $a \equiv 4 \pmod{5}$.

10. מצאו פתרון ל $5x^3 \equiv 93 \pmod{231}$ (מצאו מהם התנאים על x ואז העזרו בCRT).

11. יהי $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ פולינום המקיים $f(a) \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ לכל $a \in \mathbb{Z}$.
הוכח כי $f(a) \in 2\mathbb{Z}$ לכל $a \in \mathbb{Z}$ או ש $f(a) \in 3\mathbb{Z}$ לכל $a \in \mathbb{Z}$.
הנחייה: הניחו בשלילה והשתמשו בCRT.

12. השלימו את הטענה מההרצאה: יהי F שדה שלם סידרתית, ויהי K שדה ארכימדי כך ש $K \subseteq F$. הוכיחו כי $F = K$.

13. (*) יהי $(F, <)$ שדה סדור. הוכיחו כי התכונות הבאות של F שקולות:

(א) כל סדרת קושי היא קבועה לבסוף.

(ב) כל סדרה מתכנסת היא קבועה לבסוף.

(ג) כל סדרה המתכנסת לאפס היא אפס לבסוף.

(ד) אין סדרה חיובית המתכנסת לאפס.