בס"ד

תורת הקבוצות - תרגיל 9 - פתרון

1. א. $|\{$ אוסף הפו' מ- $\mu\times\lambda$ ל- $\kappa\}| = \kappa^{\mu\lambda}$

$|\{$ אוסף הפו' מ- μ לאוסף הפו' מ- λ ל- $\kappa\}| = (\kappa^{\lambda})^{\mu}$

נסמן את הקבוצה הראשונה ב- A והשניה ב- B.

<u>המטרה</u>: למצוא פו' חח"ע ועל מ- A ל- B.

תהי $f: \lambda\times\mu\to\kappa$.

נגדיר: $F(f)(\alpha) = g_\alpha \quad \forall\alpha<\mu$

כך ש- $g_\alpha(\beta) = f(\beta,\alpha) \quad \forall\beta\in\lambda$.

<u>חח"ע</u>: יהי $f_1\neq f_2$

אזי, יש (α,β) כך ש- $f_1(\alpha,\beta)\neq f_2(\alpha,\beta)$.

לכן $g_{1\alpha}(\beta)\neq g_{2\alpha}(\beta) \Longrightarrow g_{1\alpha}\neq g_{2\alpha}$.

כלומר, $F(f_1)(\alpha)\neq F(f_2)(\alpha) \Longrightarrow F(f_1)\neq F(f_2)$

<u>על</u>: תהי $f: \mu\to\kappa^{\lambda}$

המקור של f יהיה $g: \lambda\times\mu\to\kappa$, כך ש-

$g(\alpha,\beta) = f(\beta)(\alpha)$.

ב. תהי $f: \mu\to\kappa\times\lambda$

נגדיר $F(f) = (f_1, f_2)$

כך ש- $f_1(\alpha) =$ הרכיב הראשון של $f(\alpha)$

$f_2(\alpha) =$ הרכיב השני של $f(\alpha)$.

<u>חח"ע</u>: יהי $f\neq g$. אזי, יש $\alpha<\mu$ כך ש- $f(\alpha)\neq g(\alpha)$

אזי, יש רכיב (ראשון או שני) כך ש- $f(\alpha)\neq g(\alpha)$ ברכיב הזה.

אם $f(\alpha)\neq g(\alpha)$ ברכיב ה- i, אז $f_i(\alpha)\neq g_i(\alpha) \Longrightarrow F(f)\neq F(g)$

<u>על</u>: תהיה $f: \mu\to\kappa$

ו- $g: \mu\to\lambda$.

המקור של (f,g) יהיה $h: \mu\to\kappa\times\lambda$

שמוגדר כך: $h(\alpha) = (f(\alpha), g(\alpha))$.

בס"ד

2. לכל λ אינסופית, $\lambda^{\lambda} = 2^{\lambda}$ (ראינו בהרצאה).

כמו כן, בהנחת השערת הרצף המוכללת, $2^{\lambda} = \lambda^{+}$.

לכן $\lambda^{\lambda} = \lambda^{+}$.

כעת, בהנחת GCH, $\kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^{+}$

כלומר $\kappa^{+} = \lambda^{+} \Rightarrow \kappa = \lambda$.

3. ברור כי $(\aleph_2)^{\aleph_0} \ge (\aleph_1)^{\aleph_0}$.

נוכיח את הכיוון השני:

$$\aleph_2^{\aleph_0} \le \aleph_{1_8}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \le \aleph_1^{\aleph_0}$$

לכן $\aleph_2^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0}$.

4. $\Rightarrow$ נניח $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

$$\aleph_1^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

$\Leftarrow$ נניח $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$.

ברור ש-$2^{\aleph_0} > \aleph_0$ ולכן $2^{\aleph_0} \ge \aleph_1$.

כמו כן $2^{\aleph_0} \le \aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$

לכן $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.