תרגול 2

1. בכל אחד מהסעיפים, קבעו אם המטריקות שקולות ואם הטופולוגיות מוכלות אחת בשניה, והוכיחו את קביעתכם.

(א) $(\mathbb{Z}, d_p)$ ו־ $(\mathbb{Z}, d_q)$ עבור $p \neq q$ (ושניהם ראשוניים).
פתרון: אין קשר בין הטופולוגיות. נמצא שתי סדרות שיתכנסו רק באחד המרחבים. אפשר לקחת את p^n ו־q^n שמתכנסת ל־0 ב־$(\mathbb{Z}, d_p)$ וב־$(\mathbb{Z}, d_q)$ בהתאמה (אבל לא בשניהם).

(ב) (l_1, d_1) ו־ (l_1, d_∞).
פתרון: קל לראות שלכל $x, y \in l_1$ מתקיים $d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y)$ ולפי משפט השוואת טופולוגיות, הטופולוגיה של d_∞ מוכלת בזו של d_1. נראה שההפך אינו נכון. נסתכל על הסדרה $\{\{T_i^j\}_{i\in\mathbb{N}}\}_{j\geq 1} \subseteq l_1$ שמוגדרת ע"י:

$$T_i^j := \begin{cases} \frac{1}{j} & i < j \\ 0 & i \geq j \end{cases}$$

קל לראות ש־$d_1(0, \{T_i^j\}_{i\in\mathbb{N}}) = 1$ בעוד ש־$d_\infty(0, \{T_i^j\}_{i\in\mathbb{N}}) = \frac{1}{j} \to 0$ ולכן $\{T_i^j\}_{i\in\mathbb{N}} \xrightarrow{d_\infty} 0$, מה שלא נכון ב־$d_1$.

(ג) $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ עם המטריקה האוקלידית ומטריקת המרחק על המעגל.
פתרון: המטריקות הללו שקולות. נראה זאת לפי משפט השוואת הטופולוגיות בכך שנראה שהתכנסות סדרות היא זהה בשני המקרים. נסמן את המטריקה האוקלידית ב־d_e ואת מטריקת המעגל כ־d_s. מכיוון שהקו הישר הוא הדרך הכי קצרה בין שתי נקודות, מתקיים

$$d_e(x, y) \leq d_s(x, y)$$

לכן d_s דומיננטית ביחס ל־d_e. מנגד, ננח ש־$x_n \xrightarrow{d_e} x$. כלומר $\lim_{n\to\infty} d_e(x_n$,x)=0. לפי משפט הסינוסים (שרטטו את זה כדי לוודא), מתקיים

$$d_s(x, y) = 2 \arctan \frac{d_e(x, y)}{2}$$

זו פונקציה שרציפה ב־0 ולכן מתקיים $\lim_{n\to\infty} d_s(x_n, x) = 0$, או במילים אחרות $x_n \xrightarrow{d_s} x$. זה נכון לכל סדרה ולכן לפי הגדרה d_e דומיננטית ביחס ל־d_e. ביחד אנחנו מקבלים שהמטריקות שקולות.

2. הוכיחו את הטענות הבאות

(א) כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי
פתרון: נניח ש־$\{x_n\}$ מתכנסת ל x. נראה שהיא קושי: יהא ϵ נתון. אזי קיים n_0 כך ש

$$\forall n \geq n_0 : d(x_n, x) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

לכן

$$\forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

(ב) כל סדרת קושי עם תת סדרה מתכנסת היא מתכנסת
פתרון: יהא ϵ נתון. נסמן x הגבול של ת"ס. לכן קיים k_0 כך ש

$$\forall k \geq k_0 : d(x_{n_k}, x) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

מהגדרת הגבול. בנוסף מהגדרת סדרת קושי קיים n_0 כך ש

$$\forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

לכן עבור $N_0 = \max\{k_0, n_0\}$ מתקיים כי

$$\forall n \geq N_0 : d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

כאשר לכל n נבחר $n \leq n_k$.

(ג) כל סדרת קושי היא חסומה
פתרון: קיים n_0 כך ש $\forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) \leq 1$ נגדיר $r = \max_{i,j \leq n_0} d(x_i, x_j)$.
טענה $diam\{x_n\} \leq r + 1$. הוכחה:

$$d(x_i, x_j) \leq \begin{cases} r & i, j \leq n_0 \\ d(x_i, x_{n_0}) + d(x_0, x_j) \leq r + 1 & i \leq n_0 < j \\ 1 & n_0 < i, j \end{cases}$$

וסיימנו.

3. הוכיחו או הפריכו: אם שתי מטריקות שקולות והאחת שלמה, גם השניה.
פתרון: לא. ניתן דוגמא נגדית.
נסתכל על המטריקה d_f על הממשיים, המוגדרת ע"י הפונקציה $f(x) = e^x$, כלומר המטריקה שמוגדרת לפי $d_f(x, y) := |e^x - e^y|$. אפשר לראות שזו מטריקה לפי שאלה 5 בתרגול זה.
המטריקה השניה שניקח היא המטריקה האוקלידית. $(\mathbb{R}, |*|)$.
הפונקציה המעריכית היא מונוטונית ולכן:

$$d_f(x, y) := |e^x - e^y| \leq |e^x| + |e^y| \leq e^{\max(x,y)}$$

בפרט, אם נסתכל על הסדרה $x_n := -n$ אז נגלה שלכל $n_0 \le n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$d(x_n,, x_m) \le e^{\max(x_n, x_m)} \le e^{-n_0} \xrightarrow{n_0 \to \infty} 0$$

ולכן זו סדרת קושי לפי המטריקה d_f (עם זאת, ברור שזו אינה סדרת קושי במטריקה האוקלידית). בנוסף, ברור שהסדרה הזו אינה מתכנסת.

כל שנשאר להראות הוא שהמטריקות הללו שקולות. ראשית נניח ש־x_n מתכנסת ל־x לפי המטריקה האוקלידית, ונראה שהיא תתכנס גם לפי d_f. הפונקציה e^x הינה רציפה ולכן $\lim_{n \in \mathbb{N}} e^{x_n - x} = e^0 = 1$. מכאן נסיק שגם:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} d_f(x_n, x) := \lim_{n \in \mathbb{N}} |e^{x_n} - e^x| = \lim_{n \in \mathbb{N}} e^x |e^{x_n - x} - 1| = e^x \lim_{n \in \mathbb{N}} |e^{x_n - x} - 1| = 0$$

כלומר, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ מתכנסת גם לפי d_f. מנגד, אם $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ מתכנסת לפי d_f אז מתקיים:

$$0 = \lim_{n \in \mathbb{N}} |e^x - e^{x_n}| = \lim_{n \in \mathbb{N}} e^x |1 - e^{x_n - x}| = e^x \lim_{n \in \mathbb{N}} |1 - e^{x_n - x}|$$

כדי שזה יתקיים, הכרחי ש־$\lim_{n \in \mathbb{N}} e^{x_n - x} = 1$. זה נכון רק אם $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n - x = 0$, ולכן x_n מתכנסת ל־x במטרקה האוקלידית.

4. עבור כל אחד מהמרחבים הבאים, מצאו סדרת קושי שאינה מתכנסת:

(א) $\mathbb{Q}$

<u>פתרון:</u> ניקח את הסדרה $3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \ldots$, כלומר קירובים עשרוניים של פאי. הסדרה שואפת לפאי בממשיים ולכן גם סדרת קושי (ראה תרגיל 2). מנגד, בבירור אין לה גבול ברציונלים.

(ב) $(\mathbb{Z}, d_p)$ עבור $p \ne 2$ (הטענה נכונה גם עבור $p = 2$, אבל אז ההוכחה טיפה שונה)

<u>פתרון:</u> נעזר בטענות הבאות:

i. טענה: אם $x_n \to x$ בd_p אזי $cx_n \to cx$ בd_p.

הוכחה: כיוון ש $\max\{k :\ k| (x_n - x)\} \le \max\{k :\ k|c(x_n - x)\}$ נקבל כי

$$d(cx_n, cx) = \frac{1}{p^{k(cx_n, cx)}} \le \frac{1}{p^{k(x_n, x)}} = d(x_n, x) \to 0$$

א'. הערה: זה לא נכון במקרה כללי (כלומר, קיימים מרחבים מטריים מעל $\mathbb{R}$, שבהם כפל בסקלר לא שומר על התכנסות). למשל ב $(\mathbb{R}, d)$ המוגדרת ע"י $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ כאשר f היא הזהות פרט להחלפה של $2 \rightleftarrows 1$. מתקיים כי $x_n = 4 + \frac{1}{n} \to x = 4$ אבל $\frac{1}{2}x_n = 2 + \frac{1}{2n}$ לא שואף ל 2 כי

$$d(\frac{1}{2}x_n, 2) = \left|2 + \frac{1}{2n} - 1\right| = \left|1 + \frac{1}{2n}\right|$$

ב'. טענה: $a_n = \sum_{i=0}^{n} p^i = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$ לא מתכנסת אבל היא סדרת קושי (ולכן המרחב לא שלם).

הוכחה: לכל $n < m$ מתקיים כי

$$d(a_n, a_m) = \frac{1}{p^{k(\sum_{i=n+1}^{m} p^i, 0)}} = \frac{1}{p^{n+1}}$$

ולכן זוהי סדרת קושי. בנוסף אם הסדרה מתכנסת $a_n \to a$ אזי גם $p^{n+1}-1 = (p-1)\,a_n \to (p-1)\,a$. נסמן ב $k = \max\{t : p^t |\, (-1-a\,(p-1))\}$. (קיים מקסימום, כי מכיוון שהנחנו ש$p \neq 2$, הביטוי שונה מ0). טענה: הסדרה

$$d(p^{n+1}-1, (p-1)\,a)$$

קבועה לבסוף על $\frac{1}{p^k}$. הסבר: צריך לחשב את $k(p^{n+1}-1, (p-1)a)$. כלומר, מי החזקה המקסימלית של p שמחלקת את $p^{n+1}-1-(p-1)a$. נסמן $-1-(p-1)a = p^k m$ כאשר $(p, m) = 1$. כלומר, עלינו למצוא מי החזקה הכי גבוהה של p שמחלקת את $p^{n+1} - p^k m$. ברור שהחל מ$n = k$, נקבל ש$p^k | p^{n-1} - p^k m$, כי $p^k | p^{n+1} \wedge p^k | p^k m$. כמו כן, $p^{k+1} \nmid p^{n+1} - p^k m$, כי $p^{k+1} \mid p^{n+1}$, אבל $p^{n+1} \nmid p^k m$.

מסקנה:

$$d(p^{n+1}-1, (p-1)\,a) \to \frac{1}{p^k} \neq 0$$

בסתירה להתכנסות.

(ג) $(C[0,1], d_1)$

<u>פתרון</u>: ניתן דוגמא לסדרת קושי שאינה מתכנסת. נגדיר $\{f_n\}_{n\geq 2}$ להיות 0 בקטע $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ אח"כ עולה ל 1 בקטע $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right]$ ואח"כ שווה 1 בקטע $\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{n}, 1\right]$. מתקיים כי לכל $n < m$ כי

$$\int_0^1 |f_n - f_m|\, dx \leq \frac{1}{n} \cdot 1$$

כי הם נבדלות רק בקטע $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right]$ וההבדל הוא 1 לכל היותר. ולכן זוהי סדרת קושי. בנוסף אם f_n מתכנסת היא מתכנסת לפונקצית מדרגה ששוה 0 בקטע $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ו 1 בקטע $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ שאינה שייכת למרחב.

5. יהי X קבוצה ו־(Y, ρ) מרחב מטרי. נניח בנוסף ש־$f : X \to Y$ פונקציה כלשהי. נגדיר פסאודו־מטריקה d על X לפי

$$d(x, y) := \rho(f(x), f(y))$$

(א) הראה שזו פסאודו־מטריקה

(ב) מתי היא מטריקה

(ג) תארו את הטופולוגיה של (X,d) בעזרת הטופולוגיה של (Y,ρ).
<u>פתרון:</u>
ראשית, נראה שזו אכן מטריקה:

$$d(x,x) := \rho(f(x),f(x)) = 0$$

$$d(x,y) = \rho(f(x),f(y)) = \rho(f(y),f(x)) = d(y,x)$$

$$d(x,z) = \rho(f(x),f(z)) \leq \rho(f(x),f(y)) + \rho(f(y),f(z)) = d(x,y) + d(y,z)$$

כעת, נוכיח שהיא מטריקה אמ"מ f חח"ע.
מצד אחד, אם היא אכן מטריקה, אז לכל $x \neq y \in X$ מתקיים $d(x,y) \neq 0$. לפי הגדרה זה אומר ש־$\rho(f(x),f(y)) > 0$. בגלל ש־ρ מטריקה (מספיק כאן אפילו אם היא הייתה פסאודו־מטריקה), בהכרח $f(x) \neq f(y)$ ולכן הפונקציה חח"ע.
מנגד, אם f חח"ע, אז לכל $x \neq y \in X$ מתקיים $f(x) \neq f(y)$ ומשום ש־ρ מטריקה של ממש, $d(x,y) = \rho(f(x),f(y)) > 0$.

לבסוף, נראה ש־$O \subseteq X$ קבוצה פתוחה לפי d אמ"מ $f(O) \subseteq Y$ קבוצה פתוחה ב־$f(Y)$ לפי ρ. ו־$f^{-1}(f(O)) = O$ (שימו לב שתנאי זה תמיד מתקיים אם f חח"ע).
אכן, נניח ש־O קבוצה פתוחה לפי d, נראה ש־$f(O)$ קבוצה פתוחה גם היא (ב־$f(Y)$). יהי $y \in f(O)$. קיים $x \in O$ כך ש־$y = f(x)$. מכיוון ש־O פתוחה קיים $r > 0$ כך ש־$B(x,r) \subseteq O$. אנחנו טוענים ש־$B_{f(Y)}(f(x),r) \subseteq f(O)$. יהי $z \in B_{f(Y)}(f(x),r)$. לפי הגדרה, קיים $w \in X$ כך ש־$z = f(w)$. בנוסף, $\rho(z,f(x)) < r$. לפי ההגדרה, $d(x,w) < r$ ולכן $w \in B(x,r) \subseteq O$. מכאן רואים ש־$z = f(w) \in f(O)$. נראה גם ש־$O = f^{-1}(f(O))$. ברור ש־$O \subseteq f^{-1}(f(O))$. מנגד, נניח בשלילה שיש $x \in f^{-1}(f(O)) \setminus O$. לפי הגדרה, קיים $w \in O$ כך ש־$f(x) = f(w)$. לכן, $d(x,w) = \rho(f(x),f(y)) = 0$. מכאן שלכל $r > 0$ מתקיים $w \in B_X(x,r)$ אבל $w \notin O$, בסתירה לכך ש־O פתוחה.

מהצד השני, נניח ש־$f(O)$ קבוצה פתוחה ב־$f(Y)$ וגם $O = f^{-1}(f(O))$. יהי $x \in O$. לפי הגדרה, קיים $r > 0$ כך ש־$B_{f(Y)}(f(x),r) \subseteq f(O)$. אנחנו טוענים ש־$B_X(x,r) \subseteq O$. אכן, אם $w \in B_X(x,r)$, אז לפי הגדרה

$$d(x,w) = \rho(f(x),f(w)) < r$$

מכאן ברור ש־$f(w) \in B_{f(Y)}(f(x),r) \subseteq f(O)$. במילים אחרות $w \in f^{-1}(f(O)) = O$, כרצוי.

6. <u>מרסן (Mersenne) נגד המספרים ה־2־אדים:</u> נגדיר

$$P_{-1} := \{-1\} \cup \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ is prime}\}$$

הוכיחו שאם -1 היא נקודה מבודדת ב־P_{-1} עם המטריקה ה־2־אדית, אז יש רק כמות סופית של ראשוני מרסן.

הערה: אפשר ליצור תרגיל דומה על ראשוני פרמה.
פתרון: נניח שקיימים אינסוף ראשוני מרסן $p_{n_k} = 2^{n_k} - 1$ עבור תת סדרה $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ כלשהי. שימו לב שלכל מספר כזה מתקיים

$$d_2(-1, p_{n_k}) := |p_{n_k} - (-1)|_2 = |2^{n_k} - 1 + 1|_2 = |2^{n_k}|_2 = 2^{-n_k} \to 0$$

לכן, הסדרה $\{p_{n_k}\} \subseteq P_{-1}$ שואפת ל־-1. לפי משפט מההרצאה זו לא נקודה מבודדת.

7. קולץ (Collatz) נגד המספרים ה־2־אדים: נגדיר את הפונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ע"י

$$f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & n \in 2\mathbb{N} \\ 3n+1 & \text{else} \end{cases}$$

עבור $k \in \mathbb{N}$ נסמן $f^{\{k\}}(n) := f(f(\dots(f(n)))$, כלומר, הפעלה מחזורית של f במשך k פעמים.
השערת קולץ אומרת שלכל מספר $n \in \mathbb{N}$ קיים מספר $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$f^{\{k\}}(n) = 1$.
הוכיחו ש־f פונקציה רציפה ביחס למטריקה ה־2־אדית.
הוכחה: נראה שהפונקציה רציפה בכל נקודה. יהי $x \in \mathbb{N}$ ויהי $\varepsilon > 0$. ניתן למצוא $k \in \mathbb{N}$ כך ש־$2^{-k} < \varepsilon$. נחלק לשני מקרים:
ראשית נניח ש־$x \in 2\mathbb{N}$. נגדיר $\delta := 2^{-k-1}$. קל לראות שאם $d_2(x,y) < \delta$ אז $y \in 2\mathbb{N}$ ולכן

$$d_2(f(x), f(y)) = d_2(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}) = 2d_2(x,y) \le 2\delta = 2 \cdot 2^{-k-1} = 2^{-k} < \varepsilon$$

כרצוי.
מנגד, נניח ש־$x \in 1 + 2\mathbb{N}$. נגדיר $\delta := \min(\varepsilon, \frac{1}{2})$. גם כאן קל לראות שאם $d_2(x,y) < \delta$ אז $y \in 1 + 2\mathbb{N}$, ולכן

$$d_2(f(x), f(y)) = d_2(3x+1, 3y+1) = d_2(3x, 3y) = d_2(x,y) < \delta \le \varepsilon.$$

שימו לב שהשתמשנו בעובדה שהכפלה במספר שזר ל־2 לא משפיעה על המרחק ה־2־אדי (בדקו בעצמכם).

8. אם $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ רציפה במ"ש אז תמונה של סדרת קושי $\{x_n\}$היא קושי.
הוכחה: תהי $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ פונקציה רציפה במ"ש, ותהי (x_n) סדרת קושי.
המטרה היא להוכיח ש$(f(x_n))$ היא סדרת קושי.
ובכן, יהא $\epsilon > 0$ נתון. לפי הגדרת רציפות במש"ש, קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x', x'' \in X$ מתקיים:

$$d(x', x") \le \delta \Rightarrow \rho\left(f(x'), f(x")\right) \le \epsilon$$

בנוסף, לפי הגדרת סדרת קושי, קיים n_0 כך ש

$$\forall n, m \ge n_0 : d(x_n, x_m) \le \delta$$

ולכן

$$\forall n, m \ge n_0 : \rho\left(f(x_n), f(x_m)\right) \le \epsilon$$

כנדרש.

- הערה: עבור פונקציה רציפה שאינה רציפה במ"ש הטענה לא נכונה בהכרח. כלומר, אם $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ רציפה, ו־$(x_n)\subseteq X$ סדרת קושי, ייתכן ש $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ אינה סדרת קושי.
הוכחה: נבנה דוגמא נגדית. נסתכל על המרחבים $\mathbb{R}$, $(0,1)$ שניהם עם המטריקה האוקלידית.
נגדיר את הפונקציה הבאה: $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, המוגדרת ע"י $f(x)=\frac{1}{x}$.
מאינפי ידוע כי זאת פונקציה רציפה (הסיבה היא שהפונקציה רציפה בכל נקודה בה היא מוגדרת, ובנוסף היא מוגדרת בכל נקודה בקטע $(0,1)$).
כעת ניקח את הסדרה הבאה $(x_n=\dfrac{1}{n})\subseteq(x,1)$. סדרת קושי (ידוע מאינפי).
אבל $(f(x_n)=n)$ אינה סדרת קושי ב־$\mathbb{R}$.

9. יהי (X,d) מרחב פסאודו־מטרי. נגדיר יחס שקילות $\sim$ על X לפי

$$x\sim y \iff d(x,y)=0$$

(א) הראו שזה יחס שקילות

(ב) הוכיחו שהמטריקה $\overline{d}$ על $X/\sim$ שמוגדרת כ־

$$\overline{d}(\overline{x},\overline{y}):=d(x,y)$$

עבור $\overline{x},\overline{y}\in X/\sim$ מוגדרת היטב והינה מטריקה של ממש.

(ג) הוכיחו שהעתקת המנה $\rho:X\to X/\sim$ משמרת מרחקים. הסבירו מדוע היא לא תמיד תהיה איזומטריה.

פתרון:
ראשית נראה שזה אכן יחס שקילות. רפלקסיביות וסימטריות נגזרים ישרות מהתכונות של הפסאודו־נורמה. כדי לראות טרנזיטיביות, נניח ש־$x\sim y\sim z$, אז לפי אי שיוויון המשולש

$$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)=0+0=0$$

לפי הגדרה, $x\sim z$.

כעת נראה ש־$\overline{d}$ מוגדרת היטב ובעצם מטריקה. ראשית, נניח ש־$x_1\sim x_2$ ו־$y_1\sim y_2$. לפי אי שיוויון המשולש אפשר לראות ש:

$$\overline{d}(\overline{x_1},\overline{y_1}):=d(x_1,y_1)\le d(x_1,x_2)+d(x_2,y_1)\le d(x_1,x_2)+d(x_2,y_2)+d(y_2,y_1)=d(x_2,y_2):=\overline{d}(\overline{x_2},\overline{y_2})$$

נוכיח כעת את תכונות המטריקה:

$$\overline{d}(\overline{x},\overline{x}):=d(x,x)=0$$

$$\overline{d}(\overline{x},\overline{y}):=d(x,y)=d(y,x):=\overline{d}(\overline{y},\overline{x})$$

$$\overline{d}(\overline{x},\overline{z}):=d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z):=\overline{d}(\overline{x},\overline{y})+\overline{d}(\overline{y},\overline{z})$$

נשאר רק להוכיח שאם $\overline{d}(\overline{x},\overline{y}) = 0$ אז $\overline{x} = \overline{y}$. אכן, אם זה המצב אז לפי הגדרה $d(x,y) = 0$, או במילים אחרות $x \sim y$. אבל אז $\overline{x} = \overline{y}$ כרצוי.

לבסוף קל לראות ש:

$$\overline{d}(\rho(x), \rho(y)) := \overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) := d(x,y)$$

ולכן ρ אכן משמרת מרחקים. היא אינה איזומטריה בהכרח כי הגדרנו איזומטריות רק על מרחבים מטרים (אחת ההשלכות של כך היא שאיזומטריה היא תמיד חח"ע אבל ρ לאו דווקא).

10. משפט נקודת שבת: נניח ש־(X,d) מרחב מטרי שלם ותהי $f : X \to X$ פונקציית ליפשיץ עם מקדם $\alpha < 1$. הוכיחו שקיימת ל־f נקודת שבת יחידה, כלומר אחת שמקיימת $f(x) = x$.
הוכחה: נבחר $x_0 \in X$ כלשהו ונגדיר באינדוקציה $x_{n+1} := f(x_n)$. נגדיר גם $s_n := d(x_n, x_{n+1})$. נוכיח באינדוקציה ש־

$$s_n \leq \alpha^n s_0$$

אכן, כאשר $n = 0$ זה בבירור נכון. נניח שזה נכון עבור $n \in \mathbb{N}$ ונראה ל־$n+1$:

$$s_{n+1} := d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq \alpha \cdot \alpha^n s_0 = \alpha^{n+1} s_0$$

כרצוי. כעת נראה ש־$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא סדרת קושי. נראה אפילו שאם $n \leq m \in \mathbb{N}$ אז מתקיים

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n s_0}{1-\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

כדי לראות את זה, אפשר להגדיר סדרה חדשה באותו אופן שמתחילה ב־$y_0 := x_n$. כך מתקיים $y_k = x_{n+k}$, ואם נגדיר גם $t_k := d(y_{k+1}, y_k)$ אז גם $t_k = s_{n+k}$. טיעון דומה לאחד שכבר הראנו יראה ש:

$$s_{n+k} = t_k \leq \alpha^k t_0 = \alpha^k s_n \leq \alpha^k \alpha^n s_0 = \alpha^{n+k} s_0$$

עכשיו אפשר להפעיל את אי שיוויון המשולש ולקבל:

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=0}^{m-n-1} d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) = \sum_{k=0}^{m-n-1} s_{n+k} \leq$$

$$\sum_{k=0}^{m-n-1} \alpha^{n+k} s_0 = \alpha^n s_0 \sum_{k=0}^{m-n-1} \alpha^k \leq \alpha^n s_0 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha^n s_0}{1-\alpha}$$

בכך הראנו שזו אכן סדרת קושי. בגלל ש־X מרחב שלם אנחנו יודעים שהיא מתכנסת ל־$x \in X$. לפי עקרון היינה מתקיים

$$f(x) = f(\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_{n+1} = x$$

כלומר x היא נקודת שבת לפי הגדרה. בנוסף, אם $y \in X$ היא נקודת שבת כלשהי, אז מתקיים:

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y) \Rightarrow d(x,y) = 0$$

לפי הגדרת מטריקה, $x = y$ ולכן זו נקודת שבת יחידה.

- אתגר: השתמשו בטענה הקודמת כדי להוכיח את משפט הקיום והיחידות של משוואות דיפרנציאליות (חפשו בויקיפדיה).

11. בונוס ־ למת שוורץ והנגזרת (ספוילר ממרוכבות 2): נתבונן במרחב H של הפונקציות האנליטיות בסביבה של דיסק היחידה $D \subseteq \mathbb{C}$ יחד עם נורמת ה־$\max$:

$$\|f\| := \max_{z \in D} |f(z)|.$$

(שימו לב שמשפט ויירשטראוס מבטיח שהמקסימום הזה אכן קיים).
למת שוורץ אומרת שאם $\|f\| \leq 1$, אז $|f'(0)| \leq 1$.
הוכיחו שפונקציית הנגזרת ב־0, כלומר הפונקציה $\partial_0 : H \to \mathbb{R}$ שמוגדרת ע"י

$$\partial_0(f) := f'(0)$$

היא פונקציית ליפשיץ.
הראו שהטענה הזו לא נכונה אם מסתכלים על פונקציות גזירות ברציפות אינסוף פעמים מעל $[0,1]$.
פתרון:
יהיו $f, g \in H$ פונקציות אנליטיות. נגדיר $M := \|f-g\|$ וגם $h := \frac{f-g}{M}$. קל לראות ש־

$$\|h\| := \|\frac{f-g}{M}\| = \frac{1}{M}\|f-g\| = \frac{M}{M} = 1$$

לפי למת שוורץ אנחנו יכולים להסיק ש־$|h'(0)| \leq 1$. לכן:

$$||\partial_0(f)| - |\partial_0(g)|| \leq |\partial_0(f) - \partial_0(g)| = |\partial_0(f-g)| = M|\partial_0(\frac{f-g}{M})| = M|\partial_0(h)| \leq M \cdot 1 := \|f-g\| \cdot 1$$

לפי הגדרה, ∂_0 היא פונקציית ליפשיץ עם מקדם 1.
כעת,